目 录

三角級数·富理埃級数

1. 定　　义

假如 $a_0, a_1, \cdots; b_1, b_2, \cdots$ 等数与变数 x 沒有关系，那末称

$$(1)\qquad \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

是一个三角級数. (1)的系数 a_n, b_n 都是实数，第一项的 $\frac{1}{2}$ 是为方便(詳明于后)起見而引入的. 写着 $z=e^{ix}$，那末(1)是一級数

$$(2)\qquad \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-ib_n)z^n$$

的实部；称(2)的虛部

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)$$

为(1)的共軛級数. 例如：当 $0\leqslant r<1, z=re^{ix}, 0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时，一級数 $\frac{1}{2}+z+z^2+\cdots=\frac{1}{2}\frac{1+z}{1-z}$ 的实部

$$P_r(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\frac{1+z}{1-z}\right\}$$

和虚部

$$Q_r(x)=\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx$$
$$=\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2}\frac{1+z}{1-z}\right\}$$

都是收斂的三角級数，$P_r(x)$ 和 $Q_r(x)$ 是互相共軛的．由于

$$\frac{1+z}{1-z}\frac{1-\bar{z}}{1-\bar{z}}=\frac{1-r^2+2ir\sin x}{1-2r\cos x+r^2},$$

所以

$$P_r(x)=\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos x+r^2)},$$

$$Q_r(x)=\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}.$$

写着 $c_k=\frac{1}{2}(a_k-ib_k)$，$\bar{c}_k=c_{-k}$，$b_0=0$，那末 (1) 的最初 $n+1$ 項的和

$$S_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{(a_k-ib_k)e^{ikx}+(a_k+ib_k)e^{-ikx}\}$$

等于 $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$．称 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ 为(1)的复数形式，或是罗朗(Laurent)級数的形式．当 $a\neq 0$ 时，記

$$a=|a|\operatorname{sgn} a;$$

当 $a=0$ 时，規定 $\operatorname{sgn} a=0$．那末，(1)的共軛級数(3)可以写成罗朗級数的形式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -ic_k \operatorname{sgn} k\cdot e^{ikx}. \tag{4}$$

研討級数的性质，往往用到阿培耳(Abel)变换．設

$$U_k=u_0+u_1+\cdots+u_k,\quad U_{-1}=0,$$

則 $\sum_{k=m}^{n} u_k v_k=\sum_{k=m}^{n}(U_k-U_{k-1})v_k$．从而得到**阿培耳变换**：

$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k=\sum_{k=m}^{n-1} U_k(v_k-v_{k+1})-U_{m-1}v_m+U_n v_n. \tag{5}$$

当級数 $\sum|v_k-v_{k-1}|$ 收斂时，称 $\{v_k\}$ 是一个**有界变差的数列**．利用(5)，

我們就能証明下述

定理 假設 $v_0, v_1 \cdots$ 是一个有界变差的数列；在区間 $[a, b]$ 上，級数 $\sum u_n(x)$ 是均匀有界，那末級数 $\sum v_n^* u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上均匀收斂，这里 $v_n^* = v_n - \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

事实上，$v_n = v_0 + (v_1 - v_0) + \cdots + (v_n - v_{n-1})$ $(n=1, 2, \cdots)$ 是有极限的。于(5)，設 $m=0$, $U_k = U_k(x)$, $U_{-1}(x)=0$, 则当 $|U_k| \leqslant K$ 时，我們見到

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k^* = \sum_{k=0}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n^*.$$

右方的 $|U_k(v_k - v_{k+1})| \leqslant K|v_k - v_{k+1}|$，从而 $\sum U_k(v_k - v_{k+1})$ 絶对的匀斂*)。注意到 $U_n v_n^*$ 匀斂于 0，就知 $\sum u_k v_k^*$ 匀斂.

例 当 $a_n \to 0$ 时，在区間 $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ 上两个級数 $\sum a_n \cos nx$ 和 $\sum a_n \sin nx$ 都匀斂.

事实上，$1 + \cos x + \cdots + \cos nx$ 和 $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$ 分别是 $(1 - z^{n+1})/(1-z)$ $(z = e^{ix})$ 的实部和虚部，它們在 $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ 中是有界的。

2. 直交函数列

当函数 $\varphi(x)$ 在区間 $a \leqslant x \leqslant b$ 中是可測，并且 $[\varphi(x)]^2$ 在 $[a, b]$ 上的积分存在时，我們說 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 中是一个平方可积函数，記着 $f(x) \in L_2(a, b)$，或是 $f \in L^2(a, b)$.

設 $\varphi_n(x) \in L_2(a, b)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，假如

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \lambda_n > 0 & (m = n), \end{cases}$$

那末称 $\{\varphi_n(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的**一列直交函数**. 当 λ_n 都等于 1 时，称 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上是**就范的**.

設 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots$ 在 $[a, b]$ 上是一列就范的直交函数，当积分

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx \quad (n=0, 1, \cdots)$$

*) 我們叫絶对收斂并且均匀收斂的級数为絶对的匀斂。

都存在时,称 $c_0, c_1, \cdots$ 为 $f(x)$ 关于 $\{\varphi_n(x)\}$ 的**富理埃(Fourier)系数**,称級数 $\sum c_n\varphi_n(x)$ 为 $f(x)$ 的**富理埃級数**,我們記着

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x).$$

函数列 $\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 在区間 $(-\pi, \pi)$ 上成直交系，其中任一函数平方在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分都等于 π. 当 $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ 时,得到 $f(x)$ 的富理埃系数:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$(n=1, 2, \cdots).$$

我們称三角級数(1)为 $f(x)$ 的富理埃級数,写着

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx). \tag{6}$$

本篇专論三角級数,有时記(6)的右方为 $\mathfrak{S}[f]$. 又記(6)的共軛級数为 $\overline{\mathfrak{S}}[f]$.

下述定理是富理埃級数的初步性质:

定理 (i) 假如 a 和 b 都是常数,那末

$$\mathfrak{S}[af+bg] = a\mathfrak{S}[f] + b\mathfrak{S}[g].$$

(ii) 假如三角級数(1)匀斂于 $f(x)$, 那末,(1)就是 $\mathfrak{S}[f]$.

(iii) 偶函数的富理埃級数是余弦級数. 奇函数的富理埃級数是正弦級数.

【証明】 (i) 是明显的. (ii) (1)匀斂于 $f(x)$ 的話, $f(x)$ 是連續的,从而当 $n>0$ 时,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,{\cos \atop \sin} nx\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} {\cos \atop \sin} nx\cos kx\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} {\cos \atop \sin} nx\sin kx\,dx$$

$$=\frac{a_n}{b_n};$$

此式当 $n=0$ 时也成立，但 $b_0=0$. 这就証明了 (ii).

(iii) 当 $f(-x)=f(x)$ 时，$f(x)\sin kx$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分是 0，所以 $b_k=0\ (k=1, 2, \cdots)$. 若 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)\cos kx$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上的积分等于 0，从而 $a_k=0\ (k=0, 1, \cdots)$.

对于取复数值的函数列 $\varphi_n(x)\ (a\leqslant x\leqslant b,\ n=0, 1, 2, \cdots)$，假如

$$\int_a^b \varphi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}\,dx=\delta_{nm},$$

这里 $\delta_{nn}=1$, $\delta_{nm}=0\ (n\neq m)$，那末説：$\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上成一个就范的直交函数列. 例如在 $[-\pi, \pi]$ 上，函数列 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\ (n=0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots)$ 是直交而就范的. 当实函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可以 L 积分时，它的 $\mathfrak{S}[f]$ 可以写成复数形式

$$f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}, \tag{7}$$

这里

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx.$$

写着 $2c_n=a_n-ib_n$，那末 (7) 就可以化成 (6) 的形式.

适合恒等式 $f(x+2\pi)\equiv f(x)\ (-\infty<x<\infty)$ 的 $f(x)$，称它做以 2π 为周期的周期函数. 当 $f(x)$ 在任何有限区間上可以积分时，如果 $f(x+2\pi)\equiv f(x)$ 的話，积分

$$\int_a^{2\pi+a}f(x)\,dx$$

的值无关于 a.

关联着 (6)，我們有系数公式——欧拉 (Euler) 公式——

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\cos}{\sin}nx\,dx \quad (n=0, 1, 2, \cdots). \tag{8}$$

当这些积分都是在黎曼的意义下存在时，称 (6) 是一个黎曼-富理埃級数；假如 $f(x)\in L(-\pi, \pi)$，那末 (6) 是一个勒貝格-富理埃級数，簡称富理埃級数. 一般地説：当 (8) 都依某种意义存在时，称 (6) 为某种意义

的富理埃級数．假如 $\mathfrak{S}[f]$ 和 $\mathfrak{S}[g]$ 都是富理埃級数，那末当 $f(x)$ 几乎处处等于 $g(x)$ 时，$\mathfrak{S}[f]$ 和 $\mathfrak{S}[g]$ 是相同的．在下面这一节里，我們将証这个結果，成立着逆定理．

3. 三角函数系的完备性

設 $\varphi_n(x)\ (n=0, 1, \cdots)$ 是 $[a, b]$ 上的一列直交函数．假如等式

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx=0 \quad (n=0, 1, \cdots)$$

常包含 $f(x)\doteq 0$（几乎处处等于 0），那末說 $\{\varphi_n(x)\}$ 在区間 $[a, b]$ 上成**一完备系統**.

定理 三角函数 $1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上成一完备系統.

【証明】 首先对于連續函数 $f(x)$，从 $f(x+2\pi)=f(x)$ 和

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\cos}{\sin} nx\,dx=0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

导出 $f(x)=0$．假如 $f(x)\neq 0$，知道必有如下的正数 ε 和 $[x_0-\delta, x_0+\delta]\subset[-\pi, \pi]$：

$$f(x)\geqslant\varepsilon \quad (x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta).$$

我們不妨假設 $x_0=0$．函数 $T(x)=(1+\cos x-\cos\delta)^n$ 是一三角多项式，从而

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T(x)\,dx=0.$$

但是这个积分大于

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)T(x)\,dx-\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)|f(x)|\,dx$$

$$>\varepsilon\int_{-\delta}^{\delta} T(x)\,dx-\int_{-\pi}^{-\delta}|f(x)|\,dx-\int_{\delta}^{\pi}|f(x)|\,dx.$$

第一个积分大于

$$\int_{-\frac{1}{2}\delta}^{\frac{1}{2}\delta}\left(1+\cos\frac{\delta}{2}-\cos\delta\right)^n dx=\delta\left(1+\cos\frac{\delta}{2}-\cos\delta\right)^n,$$

当 $n\to\infty$ 时，此式趋向于 ∞；这是矛盾。

其次，假如有可积函数 $f(x)$ 适合

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} nx\,dx=0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

那末連續函数

$$F(x)=\int_{-\pi}^{x} f(t)dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{x} f(t)dt\,dx$$

的一切富理埃系数都等于0. 事实上,

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} kx\,dx=\mp\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} kx\,dx$$

$$=0 \quad (k>0).$$

从而 $F(x)\equiv 0$, $f(x)$ 几乎处处等于0. 証明完毕.

系　假如 $\mathfrak{S}[f]=\mathfrak{S}[g]$, 那末 $f(x)$ 几乎处处等于 $g(x)$. 假如 $\mathfrak{S}[f]$ 匀斂于 $g(x)$, 那末 $f(x)$ 几乎处处等于 $g(x)$.

4. 平方可积的函数

設 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, …在 $[a, b]$ 上是一列就范的直交函数,

$$f(x)\in L_2[a, b],$$

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x).$$

我們要求常数 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$, 使积分

$$I_n(f)=\int_a^b\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\gamma_k\varphi_k(x)\right)^2 dx$$

取最小值. 由 $\{\varphi_k\}$ 的直交性, $I_n(f)$ 等于

$$\int_a^b [f(x)]^2dx-2\sum_{k=0}^{n} c_k\gamma_k+\sum_{k=0}^{n}\gamma_k^2$$

$$=\int_a^b f^2dx-\sum_{k=0}^{n} c_k^2+\sum_{k=0}^{n}(c_k-\gamma_k)^2.$$

由是可知: 当 $\gamma_0=c_0, \cdots, \gamma_n=c_n$ 时, $I_n[f]$ 取最小值, 並且

$$c_0^2+c_1^2+\cdots+c_n^2\leqslant\int_a^b [f(x)]^2dx.$$

这个結果，是透普类(A. Toepler)于1876年指出的．上面的不等式，对于任一正整数 n 成立，因此得到貝塞耳(Bessel)的不等式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 dx. \tag{9}$$

特别当(6)中的 f 属于 $L_2(-\pi, \pi)$ 时，从(9)得到

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 dx. \tag{10}$$

此式指出 $\sum a_n^2$ 和 $\sum b_n^2$ 都是收斂級数，入后我們将証(10)中等号成立，称此等式为**派司伐耳(Parseval)等式**．当 $\{\varphi_n\}$ 在 $[a, b]$ 上具有完备性时，(9)也成等式．

无論怎样，我們已經証得如下的結果：当 $f\in L_2$ 时，(9)中的 $c_n\to 0$；(10)中的 a_n 和 b_n 都收斂于0．这些結果可以簡写为

$$c_n=o(1),\quad a_n=o(1),\quad b_n=o(1).$$

一般地說：当 $g(x)>0$ 并且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

时，我們簡写做 $f(x)=o(g(x))$ $(x\to x_0)$．当 $x\to x_0$ 时，假如 $f(x)/g(x)$ 的絕对值小于一个常数，那末写着

$$f(x)=O(|g(x)|)\quad (x\to x_0).$$

这里 x_0 可以为 ∞，也可以是一个有限数．这些写法，是藍道(E. Landau)首創的，現在广泛地被采用．記号

$$f(x)\simeq g(x)\quad (x\to x_0)$$

表示 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$．假如，当 $x\to x_0$ 时，有两个正的常数 A 和 B 适合于 $A<\dfrac{f(x)}{g(x)}<B$，那末写着

$$f(x)\sim g(x)\quad (x\to x_0).$$

例如：当 $x\to 0$ 时，$x^2=o(|x|)$，当 $x\to\infty$ 时，$x=o(x^2)$．当 $x\to 1$ 时，$\log x=O(|1-x|)$，当 $x\to\infty$ 时，

$$e^x\sim e^{x+\sin x}.$$

为了练习这些 o, O, $\sim$, $\simeq$ 等記号，再举几个例子于下．

(i) 設 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在区間$[a, x]$ $(x<b)$ 上是可积的：

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,$$

$$G(x)=\int_a^x g(t)\,dt\to\infty$$

$$(x\to b).$$

假如 $g(t)>0$, $f(x)=o(g(x))$ $(x\to b)$，那末 $F(x)=o(G(x))$．事实上，对于 $\varepsilon>0$，有如下的 $c=c(\varepsilon)$：当 $c\leqslant x<b$ 时，$|f(x)|<\varepsilon g(x)$．从而

$$|F(x)|<\int_a^c |f(t)|dt+\varepsilon G(x),$$

$$\limsup_{x\to b}\frac{|F(x)|}{G(x)}\leqslant\varepsilon,$$

由是卽得 $F(x)=o(G(x))$，因为 ε 是任意的．

从这个結果，容易导出对于級数的类似定理：設

$$g_n>0,\quad g_1+g_2+\cdots+g_n\to\infty\quad(n\to\infty),$$

則当 $f_n=o(g_n)$ 时，成立着

$$f_1+\cdots+f_n=o(g_1+\cdots+g_n).$$

(ii) 設 $f(x)$ 是一个正值单調函数，

$$F_n=f(0)+f(1)+\cdots+f(n)-\int_0^n f(x)dx.$$

那末当 $f(x)$ 是一减小函数时，极限 $\lim F_n$ 存在；当 $f(x)$ 是一增加函数时，成立着 $f(0)\leqslant F_n\leqslant f(n)$．

事实上，当 $f(k-1)\geqslant f(k)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 时，

$$0\leqslant\int_{k-1}^k f(x)\,dx-f(k)\leqslant f(k-1)-f(k).$$

正項級数 $\sum(f(k-1)-f(k))$ 收斂于 $f(0)-\lim f(n)$．从而当 $n\to\infty$ 时，

$$\sum_{k=1}^n\left\{\int_{k-1}^k f(x)\,dx-f(k)\right\}=f(0)-F_n$$

的极限存在．假如 $f(x)$ 是一增加函数，那末从

$$f(k-1)\leqslant\int_{k-1}^k f(x)dx\leqslant f(k)$$

得着 $\sum_{1}^{n} f(k-1) \leqslant \int_{0}^{n} f(x)\,dx \leqslant \sum_{1}^{n} f(k)$。因此，

$$f(0) \leqslant F_n \leqslant f(n).$$

例如 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 的話，就知 $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n$ 当 $n\to\infty$ 时，有极限存在，所謂欧拉的常数；实际上，此常数等于

$$0.577215664901532860\,60\cdots.$$

当 $\alpha>-1$ 时，成立着

$$1^{\alpha}+2^{\alpha}+\cdots+n^{\alpha} \simeq \frac{n^{\alpha+1}}{1+\alpha}.$$

特别当 $-1<\alpha<0$ 时，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha}-\dfrac{n^{\alpha+1}}{1+\alpha}\right)$ 存在。

第 一 章

富理埃級数的收斂

1. 富理埃級数的运算

I. 用$\mathfrak{S}[f(x)]$的系数来表示$\mathfrak{S}[f(x+a)]$的系数

設

(1) $$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

則 $f(x+a)\sim\frac{1}{2}a_0(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n(a)\cos nx+b_n(a)\sin nx\}$，这里

(2) $a_n(a)=a_n\cos na+b_n\sin na,\quad b_n(a)=-a_n\sin na+b_n\cos na.$

事实上，将(1)写成复数形 $\sum c_n e^{inx}$ 的話，$f(x+a)$的系数可从下式算出：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+a)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}e^{ina}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+a)e^{-in(x+a)}\,dx=e^{ina}c_n.$$

$\mathfrak{S}[f(x+a)]$的一般項 $a_n(a)\cos nx+b_n(a)\sin nx$ 必須等于

$$c_ne^{ina}\cdot e^{inx}+c_{-n}e^{-ina}\cdot e^{-inx}$$
$$=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)e^{in(x+a)}+\frac{1}{2}(a_n+ib_n)e^{-in(x+a)}$$
$$=a_n\cos n(x+a)+b_n\sin n(x+a).$$

由是得到(2).

II. 两函数的周旋函数

当函数

$$h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)\,dt$$

存在时，称它做 f 和 g 的**周旋函数**. 对于可积函数 f 和 g 的周旋函数 h 的研討，我們需要下面的

引理　假如 $f(x)\in L(a,b)$，那末对于任意两正数 ε 和 δ，必有全連續函数 $\varphi(x)$，使不适合于 $|f(x)-\varphi(x)|<\delta$ 的一切 $x\,(a\leqslant x\leqslant b)$，成一个測度小于 ε 的集.

【証明】　当 $f(x)$ 是一个有界正值函数时，存在着如下的自然数 n: $f(x)<n\delta\,(a\leqslant x\leqslant b)$. 函数值 $f(x)$ 落在 $[\nu\delta,(\nu+1)\delta)$ 中的一切 x 成一点集 $E_\nu\,(\nu=0,\cdots,n-1)$. 作开集 O_ν 包含 E_ν 而使測度 $|O_\nu|<|E_\nu|+\varepsilon/3n$. 于 O_ν 中取有限个区間，使这些区間所成之点集 S_ν 适合

$$|S_\nu|>|O_\nu|-\frac{\varepsilon}{3n}.$$

固定 ν，作如下的函数

$$\psi_\nu(x)=\begin{cases}\nu\delta & (x\in S_\nu),\\ 0 & (x\overline{\in} S_\nu,\ a\leqslant x\leqslant b).\end{cases}$$

那末 $\psi_\nu(x)$ 的不連續点是 S_ν 中某一区間的左端或是右端，从而这些点的个数是有限的. 将 $\psi_\nu(x)$ 的任一不連續点的附近，改修 $\psi_\nu(x)$ 的值，使它变成一个全連續函数 $\varphi_\nu(x)\leqslant\psi_\nu(x)\,(x\in S_\nu)$，并且使 $\varphi_\nu(x)\neq\psi_\nu(x)$ 的一切 x 所成之集 e_ν，其測度小于 $\frac{\varepsilon}{3n}$.

在点集 $S_\nu E_\nu-e_\nu$ 上，成立着

$$0\leqslant f(x)-\varphi_\nu(x)\leqslant\delta,$$

由是，全連續函数 $\varphi(x)=\varphi_0(x)+\cdots+\varphi_{n-1}(x)$ 在点集 $\sum_{\nu=0}^{n-1}(S_\nu E_\nu-e_\nu)$ 上，滿足 $0\leqslant f(x)-\varphi(x)\leqslant\delta$. 但是，不滿足这个关系的一切点所成之

集是含在

$$E=\sum_{\nu=0}^{n-1}\{(O_\nu-E_\nu)+(O_\nu-S_\nu)+e_\nu\}$$

中的．由于

$$|E|<n\frac{\varepsilon}{3n}+n\frac{\varepsilon}{3n}+n\frac{\varepsilon}{3n}=\varepsilon,$$

所以引理当$f(x)$是一个正值有界函数时成立，从而当$f(x)$是一个有界函数时成立．

設$f(x)$是一无界函数，$|f(x)|$在$[a, b]$上的积分为I．对于正数ε，适合于

$$|f(x)|\geqslant\frac{2I}{\varepsilon}\quad(a\leqslant x\leqslant b)$$

的一切x，成一点集E_ε；$|E_\varepsilon|<\frac{\varepsilon}{2}$．作有界函数

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}f(x) & (x\overline{\in}E_\varepsilon),\\ 0 & (x\in E_\varepsilon).\end{cases}$$

对于$f_\varepsilon(x)$，有全連續函数$\varphi(x)$，使

$$|f_\varepsilon(x)-\varphi(x)|<\delta$$

不成立的一切$x(a\leqslant x\leqslant b)$所成之集$\mathscr{E}_\delta$的測度小于$\frac{\varepsilon}{2}$．假如

$$x\overline{\in}\mathscr{E}_\delta+E_\varepsilon,$$

那末

$$|f(x)-\varphi(x)|=|f_\varepsilon(x)-\varphi(x)|<\delta,$$

由于$\mathscr{E}_\delta+E_\varepsilon$的測度小于$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，所以引理成立．

系 1　$f(x)\in L(a, b)$的話，对于任一正数η，必有全連續函数$\varphi(x)$，适合

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|dx<\eta.$$

事实上，当$|f(x)|\leqslant M$时，可取引理中的全連續函数$\varphi(x)$适合$|\varphi(x)|\leqslant M$．从而

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|dx<\delta(b-a)+2\varepsilon M.$$

取 ε 和 δ 足够小，可使 $\delta(b-a)+2\varepsilon M<\eta$. 假如 $f(x)$ 是一无界函数，那末先取很小的 ε，次取适当的全連續函数 $\varphi(x)$，可使

$$\int_a^b|f-\varphi|\,dx\leqslant\int_a^b|f-f_\varepsilon|\,dx+\int_a^b|f_\varepsilon-\varphi|\,dx<\eta.$$

利用系 1，我們就能建立积分的順序变換公式：

系 2 設

$f(x)\in L(a,\ b)$，$g(y)\in L(\alpha,\ \beta)$，$k(x,\ y)\in C[a,\ b;\alpha,\ \beta]$ *)，

則

$$(3)\quad \int_\alpha^\beta g(y)\left[\int_a^b f(x)k(x,\ y)\,dx\right]dy=\int_a^b f(x)\left[\int_\alpha^\beta g(y)k(x,\ y)\,dy\right]dx.$$

但是，这个結果可以从下述定理直接获得：假如 $f(x,\ y)$ 在矩形 $[a,\ b;\alpha,\ \beta]$ 上可以 L 积分，那末两个积分

$$\int_a^b f(x,\ y)\,dx\ \text{和}\ \int_\alpha^\beta f(x,\ y)\,dy$$

分别在 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 和 $a\leqslant x\leqslant b$ 上几乎处处存在，并且

$$(4)\qquad \int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,\ y)\,dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,\ y)\,dy\right]dx,$$

这些积分都等于 $f(x,\ y)$ 在矩形 $[a,\ b;\alpha,\ \beta]$ 的积分. 証明可閱著者的《实函数論》第八章 § 10. 我們称 (4) 为**富碧尼**(Fubini)**公式**.

利用 (3) 和 (4)，我們就能証明

定理 假如 $g(x)\sim\sum d_n e^{inx}$ 和 $f(x)\sim\sum c_n e^{inx}$ 都是勒貝格-富理埃級数，那末它們的周旋函数 $h(x)$ 属于 $L(-\pi,\ \pi)$，并且 $\mathfrak{S}[h]$ 是

$$(5)\qquad h(x)\sim\sum c_n d_{-n}e^{inx}.$$

【証明】 設 $f_+(x)=\max(f(x),\ 0)$，$f_-(x)=\min(f(x),\ 0)$. 同样可以定义 $g_+(x)$ 和 $g_-(x)$；則因

$$f(x)=f_+(x)+f_-(x),\quad g(x)=g_+(x)+g_-(x),$$

$h(x)$ 是下列四个函数

$$h_{+,-}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_+(x+t)g_-(x)\,dx,\ \cdots,$$

---

*) 此式表示：$k(x,\ y)$ 是矩形 R：$a\leqslant x\leqslant b$，$\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 上的連續函数.

$$h_{-,+}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_-(x+t)g_+(x)dx$$

的和：

$$h(x)=h_{+,+}(x)+h_{+,-}(x)+h_{-,+}(x)+h_{-,-}(x).$$

我們只要証明 $h_{+,+}(x)$ 的几乎处处存在，就能明白 $h(x)$ 的几乎处处存在．这就是說，要証 $h(x)$ 的存在，不妨假設 f 和 g 都是正値函数．置 $g_n(x)=\min(n,\ g(x))$，

$$h_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g_n(t)dt,$$

我們得到单調增加的函数列 $\{h_n\}$：$h_n(x)\leqslant h_{n+1}(x)$．利用富鮃尼公式，并且注意着 $f(x+2\pi)\equiv f(x)$，我們見到

$$\pi\int_{-\pi}^{\pi}h_n(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}g_n(t)\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)dx\right]dt=\int_{-\pi}^{\pi}g_n(t)dt\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$$

当 $n\to\infty$ 时，右方有极限值 $\int g dt\cdot\int f dx$．由勒維 (Levi) 的定理（参看著者的《实函数論》第八章 § 6），$\lim h_n(x)=h(x)$ 可以积分，并且

$$\lim\int_{-\pi}^{\pi}h_n(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}h(x)dx.$$

最后証明(5)．利用(3)，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)e^{-inx}dt\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)e^{int}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)e^{-in(x+t)}dx\right]dt=d_{-n}c_n.$$

証明完毕．

III. 富理埃級数的逐項微分

假如全連續函数 $f(x)$ 具有周期 2π，那末 $\mathfrak{S}[f]$ 的逐項微分級数 $\mathfrak{S}'[f]$ 就是 $f'(x)$ 的富理埃級数 $\mathfrak{S}[f']$．

事实上，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'(x)e^{-inx}dx=in\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}dx,$$

所以从 $f(x)\sim\sum c_n e^{inx}$，得到 $f'(x)\sim\sum inc_n e^{inx}$．

現在考慮分区全連續函数 $f(x)$ 的 $\mathfrak{S}'[f]$. 在 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上的分区全連續函数 $f(x)$ 是这样的：設 $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=2\pi$, 假設

$$f(x_{\nu-1}+0)=f(x_{\nu-1}),\quad f(x_\nu-0)=f(x_\nu),$$

則 $f(x)$ 在 $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ 上成一全連續函数; $\nu=1, 2, \cdots, n$. 由是 $f'(x)$ 属于 $L(0, 2\pi)$, 存在着 $\mathfrak{S}[f']$; 一般地說:

$$\pi d_\nu=f(x_\nu+0)-f(x_\nu-0)\neq 0.$$

周期函数 $\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx/n$ 在 $(0, 2\pi)$ 上等于 $\dfrac{\pi-x}{2}$, $\varphi(\pm 0)=\pm\dfrac{\pi}{2}$. 置

$$\Phi(x)=d_0\varphi(x-x_0)+\cdots+d_{n-1}\varphi(x-x_{n-1}),$$

我們見到 $\Phi(x_\nu+0)-\Phi(x_\nu-0)=d_\nu\pi$ $(\nu=0, 1, \cdots, n-1)$, 从而 $g(x)=f(x)-\Phi(x)$ 成一全連續函数, $\mathfrak{S}'[g]=\mathfrak{S}[g']$. 由是, 我們可以証明如下的定理.

定理 設 $f(x+2\pi)\equiv f(x)$ 是分区全連續的, 其在 $0\leqslant x<2\pi$ 中的不連續点是 x_ν $(\nu=0, 1, 2, \cdots, n)$, $\pi d_\nu=f(x_\nu+0)-f(x_\nu-0)$. 記三角級数 $\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$ 为 $D(x)$ 的話, $\mathfrak{S}'[f]-\mathfrak{S}[f']$ 可以写成

$$\sum_{\nu=0}^{n} d_\nu D(x-x_\nu).$$

【証明】 由于 $g(x)=f(x)-\Phi(x)$, 所以 $g'(x)=f'(x)+\sum\limits_{\nu=0}^{n}\dfrac{d_\nu}{2}$ 几乎处处成立. 因此,

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}'[f]&=\mathfrak{S}'[g]+\mathfrak{S}'[\Phi]=\mathfrak{S}[g']+\sum_{\nu=0}^{n}d_\nu\,\mathfrak{S}'[\varphi(x-x_\nu)]\\&=\mathfrak{S}[f']+\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n}d_\nu+\sum_{\nu=0}^{n}d_\nu\Big[D(x-x_\nu)-\frac{1}{2}\Big]\\&=\mathfrak{S}[f']+\sum_{\nu=0}^{n}d_\nu D(x-x_\nu).\end{aligned}$$

定理証明完毕. 我們还应該注意到三角級数 $D(x)$ 的一个重要性质是它的阿培耳和

$$\lim_{r\to 1-0}\Big(\frac{1}{2}+r\cos x+r^2\cos 2x+\cdots\Big)=\lim_{r\to 1}\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos x+r^2)}$$

几乎处处是 0.

IV. 富理埃-斯蒂耳吉司 (Fourier-Stieltjes) 級数

設周期函数 $F(x)$ 在区間 $[-\pi, \pi]$ 上为有界变差，那末黎曼-斯蒂耳吉司积分

$$\text{(6)} \qquad \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\, nx\, dF(x) \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

都存在，我們称以 a_n, b_n 为系数的三角級数为 $dF(x)$ 的**富理埃-斯蒂耳吉司級数**，記之以 $\mathfrak{S}[dF]$：

$$dF(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

当 $F(x)$ 是全連續函数时，$\mathfrak{S}[dF] = \mathfrak{S}[F']$.

通过恒等式 $F(x+\pi) - F(x-\pi) \equiv F(\pi) - F(-\pi)$ 的假設，(6) 中的积分区間 $[-\pi, \pi]$ 可用 $[-\pi+a, \pi+a]$ 来代，不改变 a_n, b_n 的值。$F(x) - \frac{1}{2}a_0 x$ 是具有周期 2π 的周期函数.

定理 对于有界变差函数 $\{F\}$ 来說，$\mathfrak{S}[dF]$ 的全体就是 $\mathfrak{S}'[F]$ 的全体，但 $F(x+2\pi) - F(x) \equiv F(2\pi) - F(0)$.

【証明】 設 $dF(x) \sim \sum c_n e^{inx}$. 由于 $F(x) - c_0 x$ 具有周期 2π，所以 $\mathfrak{S}[F(x) - c_0 x]$ 中 e^{inx} $(n \neq 0)$ 的系数等于

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(F(x) - c_0 x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2n\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\,d(F(x) - c_0 x) = \frac{c_n}{ni}.$$

因此，$\mathfrak{S}'[F] = \mathfrak{S}[dF]$. 由是可知定理成立.

V. 富理埃級数的逐項积分

定理 假如 $f(x) \sim \sum' c_n e^{inx}$ 是勒貝格-富理埃級数，那末

$$F(x) \equiv \int_0^x f(x)\,dx \sim C + \sum{}' \frac{c_n}{in} e^{inx},$$

这里 $\sum'$ 表示 $\sum\limits_{n\neq 0}$，C 是常数.

【証明】 我們假設 $F(x+2\pi) - F(x) \equiv F(2\pi) - F(0) = 2c_0\pi$. 又由假設 $c_0 = 0$，从而当 $n \neq 0$ 时，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2ni\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx=\frac{c_n}{in}.$$

这就証明了所要的結果. 当 $c_0\neq 0$ 时,

$$F(x)-c_0 x\sim\sum{}'\frac{c_n}{in}e^{inx}+C.$$

下文我們将要証明上式成一等式.

2. 黎曼和勒貝格的定理

定理 設 $-\infty<a<b<\infty$, 則当 $f(x)\in L(a,b)$时,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)e^{inx}\,dx=0.$$

【証明】 这里不妨假設 $f(x)$ 具有周期 $b-a$: $f(x+b-a)=f(x)$. 对于正数 ε, 有全連續函数 $\varphi(x)$ 适合

$$\int_a^{b+1}|f(x)-\varphi(x)|\,dx<\varepsilon.$$

置

$$\omega(\delta,f)_L=\max_{0<h\leqslant\delta}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\,dx,$$

就得到

$$\omega(\delta,f)_L\leqslant\omega(\delta,(f-\varphi))_L+\omega(\delta,\varphi)_L,$$

将 δ 趋近于 0, 我們得到 $\omega(\delta,f)_L=o(1)$, 因为 ε 是任意的.

显然地,我們也不妨假設 $b-a=2\pi$. 假設

$$f(x)\sim\sum c_n e^{inx},$$

那末 $2\pi c_n$ 等于

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx=\int_0^{2\pi} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)e^{-in\left(x+\frac{\pi}{n}\right)}dx$$

$$=-\int_0^{2\pi} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)e^{-inx}\,dx.$$

从而

$$4\pi|c_n|=\left|\int_0^{2\pi}\left(f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)-f(x)\right)e^{-inx}\,dx\right|\leqslant\omega\left(\frac{\pi}{n},f\right)_L,$$

$$c_n=o(1).$$

定理証明完毕.

系 1 設 a_n, b_n 是 $\mathfrak{S}[f]$ 的系数,則 $a_n=o(1)$, $b_n=o(1)$.

当 $f(x)\in L(a, b)$时,称 $\omega(\delta, f)_L$ 为 f 在区間 $[a, b]$ 上的**平均連續模数**. 假如 $f(x)\in C(a, b)$, 那末称

$$\omega(\delta, f)=\max_{|x-x'|\le\delta}|f(x')-f(x)| \quad (x', x\in[a, b])$$

为 $f(x)$在 $[a, b]$上的**連續模**. 当 $\omega(\delta, f)\leqslant C\delta^{\alpha}$($C$ 和 α 都是常数)时,記着

$$f\in \mathrm{Lip}\,\alpha \quad (x\in[a, b]).$$

假如 $f(x)$不是常数,那末 $\alpha\leqslant 1$.

系 2 假如 $f(x+2\pi)\equiv f(x)$, $f\in \mathrm{Lip}\,\alpha(0<\alpha<1)$,那末 $\mathfrak{S}[f]$的富理埃系数 a_n 和 b_n 都是$O(n^{-\alpha})$; 当 $f\in \mathrm{Lip}\,1$ 时 na_n和 nb_n 都是 $o(1)$.

事实上, $c_n=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)\right)_L=O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\right)$ $(0<\alpha<1)$. 当 $f\in\mathrm{Lip}\,1$ 时, $f(x)$是一全連續函数,从而 $\mathfrak{S}[f']$也是富理埃級数, $nc_n=o(1)$.

假如 $f(x)$是一个有界变差的函数, $\mathfrak{S}[f]\sim\sum c_ne^{inx}$, 那末

$$2n\pi|c_n|\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|df(x)|.$$

后者表示 $f(x)$在$[-\pi, \pi]$上的全变差. 这个結果,从下式:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2in\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}\,df(x)$$

立刻明白. 但是不能改进为 $c_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$. 事实上,我們可举例:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2} \quad (0<x<2\pi)$$

来說明. 另一方面, F. 黎斯举例說明有界变差的連續函数 $f(x)\equiv f(x+2\pi)$的系数 c_n 也未必是 $o\left(\frac{1}{n}\right)$[*)].

哈戴(G. H. Hardy)于1916年在美国数学会通报(T. A. M. S. 17)上証明: 当 $0<a<1$, $ab>1$ (b: 正整数)时,函数 $f(x)=\sum a^n\cos b^nx$ 属于 $\mathrm{Lip}\,\alpha$, 这里

---

*) 德国数学时刊 (Math. Zeits.) 2 (1918).

$$\alpha=\log\frac{1}{a}\Big/\log b<1.$$

由于 $a^n=(b^n)^{-\alpha}$，所以 $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha<1)$ 并不含有 $c_n=o(n^{-\alpha})$.

3. 狄里克莱积分和收斂的局部性

置

$$D_n(t)=\frac{1}{2}+\cos t+\cdots+\cos nt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

$$S_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

假如 $S_n(x)$ 是 $\mathfrak{S}[f]$ 的部分和，那末 $S_n(x)$ 等于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(t-x)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)D_n(t)dt.$$

称这个积分为**狄里克莱积分**，$D_n(t)$ 是**狄里克莱积分的核**．当 $f(x)\equiv1$ 时，$S_n(x)\equiv1$，从而 $D_n(t)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的积分等于 π，

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x+t)-f(x)\}D_n(t)dt.$$

从这个等式和黎曼-勒貝格定理，就可以建立

狄尼(Dini)**定理** $\mathfrak{S}[f]$ 在如下的 x：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt<\infty,$$

是收斂的，它收斂于 $f(x)$.

事实上，由于 t 的函数 $[f(x+t)-f(x)]\Big/2\sin\frac{t}{2}\in L(-\pi,\pi)$，所以

$$S_n(x)-f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x)}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=o(1).$$

由是可知：如果 $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha(\alpha>0)$ 的話，$\mathfrak{S}[f]$ 收斂于 $f(x)$.

写着 $\varphi(t)=\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$，注意 $D_n(t)$ 是一偶函数，我們得到

八乙

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(t)D_n(t)dt.$$

固定$[0, \pi]$中的一个数 ε, 由黎曼-勒貝格定理,

$$\int_{\varepsilon}^{\pi}\varphi_x(t)D_n(t)dt=o(1).$$

从而得到

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\varphi_x(t)D_n(t)dt+o(1).$$

从这个关系,我們就能断言: **收斂的局部性定理** $\mathfrak{S}[f]$在一点 x 的收斂或不收斂,只与 f 在 x 附近的性质

$$f(x') \quad (x-\varepsilon<x'<x+\varepsilon)$$

有关系. 这个定理是包含在下述定理中的.

定理 假如$f(x)$在区間(a, b)中等于0,那末$\mathfrak{S}[f]$——自然假定$f(x+2\pi)=f(x)\in L(0, 2\pi)$——在$(a, b)$的任一閉的子区間中匀斂于0.

【証明】 首先建立如下的事实: 設 $f(t)$和 $g(t)$是两个可积的周期函数——周期是2π, 則当 $|g(t)|\leqslant K$ 时,函数

$$h_\lambda(t)=f(\lambda+t)g(t)$$

的富理埃系数,关于λ, 匀斂于0; 这就是說: 当 $\delta\to 0$ 时, $\omega(\delta, h_\lambda)_L$ 匀斂于0. 取适当的有界函数 φ, $|\varphi|\leqslant M$, 使

$$\int|f-\varphi|dt<\varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}|h_\lambda(t+\delta)-h_\lambda(t)|dt &\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(\lambda+t+\delta)-f(\lambda+t)|\cdot|g(t+\delta)|dt\\ &\quad+\int_{-\pi}^{\pi}|f(\lambda+t)|\cdot|g(t+\delta)-g(t)|dt\\ &\leqslant K\omega(\delta, f)_L+M\omega(\delta, g)+2K\varepsilon.\end{aligned}$$

因此, $\mathfrak{S}[h_\lambda]$ 的系数匀斂于0.

現在, 取函数 $g(t)$ 使它当 $|t|\leqslant\varepsilon$ 时, 其值是0; 当 $|t|>\varepsilon$ 时, $g(t)=1$, 那末在区間 $a+\varepsilon\leqslant x\leqslant b-\varepsilon$ 上, $\mathfrak{S}[f]$ 的部分和等于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{g(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

这个积分,由上述的結果,当 $n\to\infty$ 时,勻斂于0. 証明完毕.

証明中有关 $h_x(t)$的系数的勻斂性,还有如下的重要应用.

定理 設 $\mathfrak{S}[f]$ 的部分和是 $S_n(x)\,(n=0,1,2,\cdots)$,那末当 $n\to\infty$ 时,

$$\varepsilon_n(x)=S_n(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin nt}{t}\,dt$$

勻斂于0.

【証明】 $\varepsilon_n(x)$等于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right)\sin nt\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nt\,dt.$$

末项显然地勻斂于0. 由于

$$\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}$$

在$[-\pi,\pi]$上是有界,所以上式的第一項也均勻地是 $o(1)$. 从而 $\varepsilon_n(x)$ 勻斂于0.

系 設 $S_n(x)$是 $\mathfrak{S}[f]$ 的部分和,那末

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-f(x))\frac{\sin nt}{t}\,dt+o(1).$$

事实上,上式的左端減去右端等于

$$\varepsilon_n(x)-f(x)\left[1-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{t}\,dt\right].$$

第一项是 $o(1)$, 第二項等于

$$1-\frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt=o(1).$$

$\mathfrak{S}[f]$ 在一个定点的收斂或发散,不仅无关于$f(x)$在 x_0"远方"的数值,并且在适当的情况下, $\mathfrak{S}[f]$ 和 $\mathfrak{S}[f\rho]$ 在某些点,同时收斂或同时发散. 具体地說:

定理 当 $t\to 0$ 时,假如 $\rho(x_0+t)-\rho(x_0)=O(t)$, $\rho(x_0)\neq 0$,那末在点 $x=x_0$, 两个級数 $\mathfrak{S}[f(x)]$ 和 $\mathfrak{S}[\rho(x)f(x)]$ 同时收斂或同时发散.

【証明】 $\rho(x_0)\mathfrak{S}[f]$ 和 $\mathfrak{S}[\rho f]$ 在 $x=x_0$ 的部分和的差等于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\frac{\rho(x_0+t)-\rho(x_0)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=o(1).$$

由是可知定理成立.

这样的 $\rho(x)$, 称为**斯坦豪斯** (H. Steinhaus) **的因子**. 关于斯坦豪斯的因子,还有如下的

定理 假如 $\rho(x+2\pi)\equiv\rho(x)\in \mathrm{Lip}\,1$, 那末 $\rho(x)\mathfrak{S}[f(x)]$ 和 $\mathfrak{S}[\rho(x)f(x)]$ 均匀地等质.

【証明】 簡写

$$\chi(t)=f(x+t)g(t),\qquad g(t)=\frac{\rho(x+t)-\rho(x)}{2\sin\frac{1}{2}t},$$

那末 $\mathfrak{S}[\rho f]$ 和 $\rho\mathfrak{S}[f]$ 的最初 $n+1$ 項的差等于

$$J_n\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

又簡写 $\lambda=n+\frac{1}{2}$, 并且注意着函数的周期性, J_n 等于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-\frac{\pi}{\lambda}}^{\pi-\frac{\pi}{\lambda}}\chi\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)dt=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda t\,dt.$$

从而 $2J_n$ 等于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\chi(t)-\chi\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right\}\sin\lambda t\,dt.$$

两个級数 $\sum u_n(x)$ 和 $\sum v_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上均匀地等质的意义是 $\sum(u_n(x)-v_n(x))$ 在 $[a,b]$ 上匀斂于 0. 因此,我們要証明的是: 当 $\delta\to 0$ 时, $\omega(\delta,\chi)_L$ 对于 $-\infty<x<\infty$, 匀斂于 0. 設 $|h|\leqslant\delta$, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\chi(t+h)-\chi(t)|dt\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t+h)-f(x+t)|\cdot|g(t+h)|dt$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|\cdot|g(t+h)-g(t)|dt.$$

由于 $g(t)$ 是一个有界函数，所以右边第一项当 $\delta\to 0$ 时匀斂于 0. 設 $|g(t)|\leqslant K$，则对于 $\varepsilon>0$，有常数 η，使

$$\int_{-\eta}^{\eta}|f(x+t)|\cdot|g(t+h)-g(t)|dt\leqslant 2K\int_{-\eta}^{\eta}|f(x+t)|dt<\frac{\varepsilon}{3}$$

均匀地成立. 又由 $g(t)$ 的均匀連續性,取 δ 足够地小,可使

$$\int_{-\pi}^{-\eta}+\int_{\eta}^{\pi}|f(x+t)|\cdot|g(t+h)-g(t)|dt<\frac{\varepsilon}{3}$$

当 $|h|\leqslant\delta$ 时均匀地成立. 由是,取 δ 很小,可使

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\chi(t+h)-\chi(t)|dt<\varepsilon$$

当 $|h|\leqslant\delta$ 时成立. 这就是說: $\omega(\delta,\chi)_L$ 匀斂于 0. 定理証明完毕.

設 $\mathfrak{S}[f]$ 的系数是 $a_0, a_1, \cdots; b_0, b_1, \cdots$，那末它的共軛級数 $\bar{\mathfrak{S}}[f]$ 是

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx-b_n\cos nx).$$

設此級数的最初 n 项的和是 $\bar{S}_n(x)$，并且写着

$$\bar{D}_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\sin kt=\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

——这是 $D_n(t)$ 的共軛核——我們見到

$$\bar{S}_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\bar{D}_n(t-x)dt=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\bar{D}_n(t)dt.$$

設 $\psi(t)=\psi_x(t)=f(x+t)-f(x-t)$，则因 $\bar{D}_n(-t)=-\bar{D}_n(t)$，我們得到

$$\bar{S}_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\psi(t)\bar{D}_n(t)dt=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\psi(t)}{2\tan\frac{t}{2}}(1-\cos nt)dt+o(1).$$

末项的 $o(1)$，实际上是

$$\frac{1}{2}(a_n\sin nx-b_n\cos nx).$$

由于 $\psi(t)t^{-1}\in L(0,\pi)$ 等价于 $\psi(t)\cot\frac{t}{2}\in L(0,\pi)$，所以从 $\bar{S}_n(x)$ 的表达式得到

定理　当 $\frac{\psi(t)}{t}=[f(x+t)-f(x-t)]/t\in L(0,\pi)$ 时，$\tilde{\mathfrak{S}}[f]$ 在 x 收斂；此时 $\tilde{\mathfrak{S}}[f;x]$ 等于

$$\bar{f}(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\tan\frac{t}{2}}dt.$$

由是，結合这个結果和狄尼的定理，我們断言：当 $f'(x)$ 存在时，$\mathfrak{S}[f;x]$ 和 $\tilde{\mathfrak{S}}[f;x]$ 都收斂．假如 $f(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$，$\alpha>0$，那末 $\mathfrak{S}[f]$ 和 $\tilde{\mathfrak{S}}[f]$ 处处收斂，并且

$$\mathfrak{S}[f;x]=f(x),\quad \tilde{\mathfrak{S}}[f;x]=\bar{f}(x).$$

假如 $f(x)$在区間(a,b)上等于0，那末，当

$$a+\varepsilon\leqslant x\leqslant b-\varepsilon\quad(\varepsilon>0)$$

时，$\tilde{\mathfrak{S}}[f;x]$匀斂于上記的积分．

我們还应該留意：共軛級数 $\tilde{\mathfrak{S}}[f;x]$ 的收斂，也是 f 的一个局部性．事实上，对于任意小的一个正数 δ，从黎曼-勒貝格定理，我們見到

$$\bar{S}_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\delta\frac{\psi(t)}{2\tan\frac{t}{2}}(1-\cos nt)dt-\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi\frac{\psi(t)\,dt}{2\tan\frac{t}{2}}+o(1).$$

这里，中間的一項无关于 n；从而知道：当 $\lim\bar{S}_n(x)$ 存在时，其值与 $f(t)$的一切数值有关系，就是説，共軛級数在某一点的和并非是 f 的一个局部性质．另一方面，当 $\lim S_n(x)$存在时，它也是 f 的一个局部性质．事实上，

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta\varphi_x(t)D_n(t)dt+o(1).$$

在$f(x)$的普通不連續点，呂加克斯(F. Lukàcs, 1920)証得如下的

定理　假如 $f(x+0)$和 $f(x-0)$都存在而不相等，那末

$$\bar{S}_n(x)\simeq-\frac{l}{\pi}\log n,$$

这里 $l=f(x+0)-f(x-0)$．

【証明】　置 $f(x+t)-f(x-t)=l+\varepsilon(t)$，則 $\varepsilon(t)=o(1)\,(t\to0)$．由于

(1) $$\bar{S}_n(x)\equiv-\frac{l}{\pi}\int_0^\pi \bar{D}_n(t)dt-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varepsilon(t)\bar{D}_n(t)dt.$$

所以特别选取 $f(x)$ 为如下的函数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}\quad(0<x<2\pi),$$

又选取 $x=0$, 那末

$$l=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi-2\pi}{2}=\pi,$$

$$\varepsilon(t)=\frac{\pi-t}{2}-\frac{\pi-(2\pi-t)}{2}-\pi=-t.$$

这样一来,我們得到

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=-\int_0^\pi \bar{D}_n(t)dt-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi -t\,\bar{D}_n(t)dt;$$

事实上, $\bar{S}_n(0)=\left[-\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k}\right]_{x=0}$, 上式簡化为

(2) $$\int_0^\pi \bar{D}_n(t)dt=\log n+O(1).$$

在一般的情况,注意到(2)和

$$\bar{D}_n(t)=\frac{1}{2}\sin nt+\frac{1-\cos nt}{2\tan\frac{t}{2}}$$

对于 $\delta>0$, 有 η, 当 $0\leqslant t\leqslant\eta$ 时, $|\varepsilon(t)|$ 小于 δ. 从而(1)的末項等于

$$O(\delta\log n)-\frac{1}{\pi}\int_\eta^\pi \varepsilon(t)\bar{D}_n(t)dt,$$

末項是有界, δ 可以任意小;因此两項的和是 $o(\log n)$. 証明完毕.

4. 有界变差的函数

定理 假如周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上为有界变差, 那末 $\mathfrak{S}[f]$ 处处收斂于 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$. 假如 $f(x)$ 是一个有界变差的連續函数——就是説, $f(x)$ 在任何区間中具有連續性, 并且是有界变差——那末 $\mathfrak{S}[f]$ 匀斂于 $f(x)$.

【証明】 这是若当(C. Jordan, 1881)的定理. 但对于单調函数的

富理埃級数，狄里克莱于 1829 年已有論述[*]).

为簡便計，写 $2f(x)=f(x+0)+f(x-0)$；$f(x\pm0)$ 虽然到处存在，$f(x)$ 未必到处适合这个等式，但是我們不妨假定这个等式处处成立，来討論 $\mathfrak{S}[f]$ 的收斂性.

我們将 $S_n(x)-f(x)$ 写成如下的和：

$$S_n(x)-f(x)=P+Q+R+o(1),$$

$$\pi(P+Q+R)=\int_0^{\frac{\pi}{n}}+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\eta}+\int_{\eta}^{\pi}\frac{\varphi_x(t)}{t}\sin nt\,dt,$$

$o(1)$是匀斂于 0 的(参見 § 3 的一个定理). 由于$|\sin nt|\leqslant nt$，所以

$$|P|\leqslant\frac{1}{\pi}\max_{0<t<\frac{\pi}{n}}|\varphi_x(t)|\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin nt}{t}\,dt\leqslant\max_{0<t<\frac{\pi}{n}}|\varphi_x(t)|.$$

这是 $o(1)$，在 $f(x)\in C_{2\pi}$ 的情况，它匀斂于 0；$C_{2\pi}$ 表示在任何区間上具有連續性的函数 $f(x)\equiv f(x+2\pi)$ 的全体. 由是对于 $\varepsilon>0$，存在 n_1，当 $n>n_1$ 时，$|P|<\frac{\varepsilon}{3}$；当 $f\in C_{2\pi}$ 时，n_1 无关于 x.

对于 Q，我們应用平均值定理以及分部积分法：

$$Q=\frac{1}{\pi}\ \frac{n}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\xi}\varphi(t)\sin nt\,dt\quad\left(\frac{\pi}{n}<\xi<\eta\right)$$

$$=\left[\frac{-n\cos nt}{n\pi^2}\ \varphi(t)\right]_{\frac{\pi}{n}}^{\xi}+\frac{1}{\pi^2}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\xi}\cos nt\,d\varphi(t).$$

从而，取 η 很小的話，$|Q|\leqslant\frac{2}{\pi^2}\max_{0<t<\eta}|\varphi_x(t)|+\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\eta}|d\varphi(t)|<\frac{\varepsilon}{3}$；当 $f\in C_{2\pi}$ 时，可取 η 无关于 x. 事实上，当 $b-a\to0$ 时，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的全变差匀斂于 0. 固定 η，存在着 $n_2=n_2(\varepsilon)$，当 $n>n_2$ 时，$|R|<\frac{\varepsilon}{3}$. 总結起来，当 $n>\max(n_1, n_2)$ 时，

$$|S_n(x)-f(x)|<|P+Q+R|<3\,\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

---

[*]) 我們应該注意，在 $[-\pi, \pi]$ 上的单調函数 $f(x)$（非常数的話）决不能到处具有連續性. 事实上，$f(-\pi)\neq f(\pi)$.

定理証明完毕.

系 富理埃級数可以分項积分. 这就是説,当

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

时,对于任何 $[\alpha, \beta]$, 成立着

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} a_0\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx.$$

【証明】 由于 $f(x+2\pi) = f(x)$, 所以函数

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt - \frac{1}{2} a_0 x$$

具有周期 2π,它是 $C_{2\pi}$ 中的一个有界变差的函数,$\mathfrak{S}[F]$匀斂于 $F(x)$. 但是,由 §1 的 V,

$$F(x) \sim C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx).$$

实际上,这个級数匀斂于 $F(x)$. 从而

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2} a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) + C.$$

由是得到所要的等式.

关于有界变差函数 $f(x)$ 的共軛級数, W. H. 楊格証有如下的

定理 当 $f(x)$ 是有界变差时, 共軛級数 $\bar{\mathfrak{S}}[f]$ 收斂的充要条件是主值积分

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{h\to+0} \int_h^\pi \frac{\psi_x(t)}{2\tan\frac{1}{2}t} dt \left(\equiv \lim_{h\to+0} \bar{f}(x, h)\right)$$

存在. $\bar{f}(x)$ 存在的話,成立着等式

$$\bar{\mathfrak{S}}[f; x] = \bar{f}(x).$$

【証明】 我們能写

$$\bar{S}_n(x) - \bar{f}\left(x, \frac{\pi}{n}\right) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\psi_x(t)}{2\tan\frac{1}{2}t} (1 - \cos nt) dt$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{2\tan\frac{1}{2}t} \cos nt\, dt + o(1).$$

假如 x 是 $f(x)$ 的一个連續点，那末上式中最后的积分是 $o(1)$，其理相同于第一个定理的証明中的 $Q+R=o(1)$. 还有一个积分的絕对值不大于

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}|\psi_x(t)|\frac{1-\cos nt}{2\tan\frac{t}{2}}dt\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}|\psi_x(t)|n^2 t\,dt.$$

这是

$$o\left(n^2\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\,dt\right)=o(1).$$

由是可知等式的左端是 $o(1)$. 当 h 落在区間 $\left(\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n}\right)$ 中时，

$$\left|\bar{f}(x,h)-\bar{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right)\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int_h^{\frac{\pi}{n}}\frac{\psi_x(t)}{2\tan\frac{t}{2}}dt\right|=o\left(\int_{\frac{\pi}{n-1}}^{\frac{\pi}{n}}\frac{dt}{t}\right)=o(1).$$

因此，当 x 是 $f(x)$ 的一个連續点时，$\bar{f}(x)$ 的存在，等价于

$$\lim_{n\to\infty}\bar{S}_n(x)=\bar{f}(x).$$

有界变差函数 $f(x)$ 的不連續点 x 是第一种不連續点，从而

$$f(x+0)-f(x-0)$$

是一个不等于 0 的数，此时积分 $\bar{f}(x)$ 不存在；从而 $\bar{S}_n(x)\ (n\to\infty)$ 不收斂(参見吕加克斯的定理). 定理証毕.

5. 有界变差的平均函数

下式

$$\chi_x(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\varphi_x(t)\,dt$$

是 $f(t)$ 在点 x 的平均函数. 假如 $\chi_x(t)$ 在 $0\leqslant t\leqslant\pi$ 上是有界变差，那末 $\varphi_x(t)=\chi_x(t)+t\chi_x'(t)$ 几乎处处成立. 由前节中若当的定理，$\mathfrak{S}[\chi_x, 0]$ 收斂. 又由狄尼的定理，$\mathfrak{S}[t\chi_x'(t), 0]$ 收斂. 結合起来，$\mathfrak{S}[\varphi_x(t), 0]$ 收斂；就是說，$\mathfrak{S}[f, x]$ 收斂. 这样，我們証得

伐額普山(de la Vallée-Poussin)定理　假如平均函数 $\chi_x(t)\ (0\leqslant t\leqslant\pi)$ 为有界变差，$\mathfrak{S}[f, x]$ 收斂于

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\int_0^t\{f(x+u)+f(x-u)\}du.$$

这个定理，是从若当定理和狄尼定理导出来的．三个定理都是有关富理埃級数在一定点的收斂判别法，其間的包容关系，詳如下述．

定理 伐賴普山定理含有狄尼定理，也含有若当定理，若当定理不包含狄尼定理，狄尼定理也不包含若当定理．

【証明】 首先証明若当定理含在伐賴普山定理中．当 $f(x)$ 在点 x 的近旁为有界变差时，$\varphi_x(t)$ 在 $t=0$ 的近旁为有界变差．在 $t=0$ 的近旁，$\varphi_x(t)$ 是两个增加函数 $\varphi_x^1(t)$ 和 $\varphi_x^2(t)$ 的差：

$$\varphi_x(t)=\varphi_x^1(t)-\varphi_x^2(t).$$

写着 $\chi_i(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\varphi_x^i(u)du\ (i=1,\ 2)$，当 $h>0$ 时，乘积

$$[\chi_i(t+h)-\chi_i(t)]t(t+h)$$

等于

$$t\int_0^{t+h}\varphi_x^i(u)du-(t+h)\int_0^t\varphi_x^i(u)du$$

$$=t\int_t^{t+h}\varphi_x^i(u)du-h\int_0^t\varphi_x^i(u)du\geqslant t\varphi_x^i(t)\int_t^{t+h}du-h\varphi_x^i(t)\int_0^t du=0.$$

从而 $\chi_i(t+h)-\chi_i(t)\geqslant 0\ (t\geqslant 0,\ h>0)$．由是可知

$$\chi(t)=\chi_1(t)-\chi_2(t)$$

在 $t=0$ 的近旁 $(t\geqslant 0)$ 成一有界变差的函数．因此，当 $f(x)$ 在 x 满足若当收斂条件时，它也满足伐賴普山的收斂条件．

其次証明狄尼定理含在伐賴普山定理中．假如积分

$$\mu(t)=\int_0^t\frac{\varphi_x(u)}{u}du$$

依勒貝克的意义存在，那末，由微分，

$$\varphi_x(t)=[t\mu(t)]'-\mu(t)$$

几乎处处成立．从而

$$\chi(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\varphi_x(u)du=\mu(t)-\frac{1}{t}\int_0^t\mu(u)du.$$

右边两項在 $t=0$ 的近旁都是有界变差，所以 $\chi(t)$ 也是这样．

最后証明狄尼定理和若当定理互有出入. 我們就用哈戴 (G. H. Hardy) 所举的例子来闡明这个事实.

設有偶函数 $f(x)$, 当 $0<x<\pi$ 时, $f(x)=\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$, 則由狄尼定理, 知 $\mathfrak{S}[f,0]$ 收斂. 由于

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x^2}\cos\frac{1}{x},$$

$$|f'(x)|\geqslant\frac{\sqrt{x}}{x^2}\left|\cos\frac{1}{x}\right|-\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad(0<x<\pi),$$

所以, 当 $\varepsilon\to+0$ 时,

$$\int_\varepsilon^1|f'(x)|dx\geqslant\int_1^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{|\cos u|}{\sqrt{u}}du-(1-\sqrt{\varepsilon})\to\infty.$$

因此, 只用若当定理, 无从明白 $\mathfrak{S}[f;0]$ 的收斂.

又对于偶函数

$$f(x+2\pi)\equiv f(x)=f(-x)=\frac{1}{\log\frac{2\pi}{x}}\quad(0<x\leqslant\pi)$$

来說, 它是到处連續的, 在 $[-\pi,\pi]$ 上是有界变差; 由若当定理, $\mathfrak{S}[f;0]$ 收斂于 $f(0)=0$. 但是狄尼的积分

$$\int_0^\pi\frac{dt}{t\log\frac{2\pi}{t}}$$

是发散的. 証明完毕.

下节指出, 有收斂判定法强于若当定理而較弱于伐賴普山定理的.

6. 楊格的收斂定理

設在点 x, $f(x)$ 具有下述两个条件:

(i) $\chi_x(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\varphi_x(u)du=o(1)\qquad(t\to0)$,

(ii) $\Psi_x(t)=\int_0^t|d(u\varphi_x(u))|=O(t)\quad(t\to+0)$,

那末 $\mathfrak{S}[f;x]$ 收斂于 $f(x)$.

这个定理，W.H.楊格于1916年在巴黎的科学通报(C.R., Paris)上发表而不予以証明. 两年后，他在倫敦数学会志(Proc. L.M.S.)上发表一个証明，但是在証明中，他改(i)为 $\varphi_x(t)=o(1)$. 这个定理——(i)和(ii)含有 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$——的証明，是1927年，坡拉特(S. Pollard)所給的，詳見倫敦数学会期刊第二卷(J.L.M.S.2). 下面我們还要指出：当(ii)成立时，$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$的充要条件是(i).

【証明】 所要証明的是：取适当小的正数 ε，当 $n\to\infty$ 时，积分

$$\int_0^\varepsilon \varphi_x(t)\frac{\sin nt}{t}dt=\int_0^{\frac{k}{n}}+\int_{\frac{k}{n}}^\varepsilon \varphi_x(t)\frac{\sin nt}{t}dt$$

的极限等于0，这里 k 是一个相当大的数. 由于

$$(nt\cos nt-\sin nt)'=-n^2t\sin nt,$$

所以經过分部积分，得到

$$\int_0^{\frac{k}{n}}\varphi_x(t)\frac{\sin nt}{t}dt=\chi_x\left(\frac{k}{n}\right)\sin k+\int_0^{\frac{k}{n}}t\chi_x(t)\frac{n^2}{t^2}\int_0^t u\sin nu\,du\,dt.$$

末項的絕对值不大于

$$\int_0^{\frac{k}{n}}|\chi_x(t)|\frac{n^2}{t}\int_0^t u\,du\,dt=\frac{n^2}{2}\int_0^{\frac{k}{n}}t|\chi_x(t)|dt$$

$$\leqslant o\left(n^2\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)=o(k^2)=o(1).$$

由是可知：(i)含有

$$\int_0^{\frac{k}{n}}\varphi_x(t)\frac{\sin nt}{t}dt=o(1)\quad(n\to\infty).$$

假如我們能从(ii)导出

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\frac{k}{n}}^\varepsilon\varphi_x(t)\frac{\sin nt}{t}dt\right|=0,$$

那末就完成了定理的証明. 由(ii)，取 ε 相当小，函数 $t\varphi_x(t)$ 在区間 $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$ 为有界变差. 因此，最后等式中的积分是一个黎曼积分，它等于

$$\left[-\frac{1}{n}\frac{\varphi_x(t)}{t}\cos nt\right]_{\frac{k}{n}}^\varepsilon+\frac{1}{n}\int_{\frac{k}{n}}^\varepsilon\cos nt\,d\left(\frac{\varphi_x(t)}{t}\right).$$

由于 $|t\varphi_x(t)|\leqslant\int_0^t|d(u\varphi_x(u))|=O(t)$，所以 $\varphi_x(t)$ 在 $(0,\varepsilon)$ 中是一个有界函数．从而上式第一項等于

$$O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{k}\right)=o(1),$$

这是在 $n\to\infty$ 之后，令 $k\to\infty$ 而获得的．因此，証明归結于建立

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\frac{k}{n}}^{\varepsilon}\left|d\left(\frac{\varphi_x(t)}{t}\right)\right|=0.$$

写着 $h(t_i)=h_i$, $g(t_i)=g_i$．从不等式

$$|g_ih_i-g_{i+1}h_{i+1}|\leqslant|h_i(g_i-g_{i+1})|+|g_{i+1}(h_i-h_{i+1})|$$

容易明白

$$\int_a^b|d(hg)|\leqslant\int_a^b|h|d\int_a^x|dg|+\int_a^b|g|d\int_a^x|dh|.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{\frac{k}{n}}^{\varepsilon}\left|d\,\frac{\varphi_x(t)}{t}\right|&=\int_{\frac{k}{n}}^{\varepsilon}|d(t\varphi_x(t)\cdot t^{-2})|\\&\leqslant\int_{\frac{k}{n}}^{\varepsilon}t^{-2}d\Psi_x(t)+2\int_{\frac{k}{n}}^{\varepsilon}t^{-2}|\varphi_x(t)|dt\\&\leqslant\left[\frac{\Psi_x(t)}{t^2}\right]_{\frac{k}{n}}^{\varepsilon}+2\int_{\frac{k}{n}}^{\varepsilon}\Psi_x(t)\frac{dt}{t^3}+O\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\varepsilon}\frac{dt}{t^2}\right)\\&\leqslant\frac{\Psi_x(\varepsilon)}{\varepsilon^2}+O\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\varepsilon}\frac{dt}{t^2}\right)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+O\left(\frac{n}{k}\right).\end{aligned}$$

演算 $\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{n}{k}\right)$ 的結果，就化为 0．定理証明完毕．

关于共轭級数，楊格(Proc. L. M. S. 12, 1912)也有类似的

定理 設 $\psi_x(t)=o(1)$ 并且 $\int_0^t|d(t\psi_x(t))|=O(t)\ (t\to+0)$，那末

$$\bar{S}_n(x)-\bar{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right)=o(1)\quad(n\to\infty).$$

最后，我們将楊格的收斂定理，和前述的种种收斂定理一一比較，得結果如下：

定理 楊格的定理含有若当的收斂定理，而与狄尼的定理互有短

长，但是它也不含在伐賴普山的定理中．

【証明】 首先証明楊格定理含有若当定理．当 $\varphi_x(t)$ 在 $t=0$ 的附近为有界变差时，积分 $\int_0^t |d(u\varphi_x(u))|$ 的值不大于

$$\int_0^t ud\left(\int_0^u |d\varphi_x(v)|\right)+\int_0^t |\varphi_x(u)|du\leqslant t\int_0^t d\left(\int_0^u |d\varphi_x(v)|\right)+O(t)=O(t).$$

因此，楊格定理中的两个条件(i)和(ii)都成立．

其次証明狄尼定理不含在楊格定理中．从满足狄尼条件的函数

$$\varphi_x(t)=\sqrt{t}\sin\frac{1}{t}\quad(x=0),$$

作成楊格的积分 $\int_0^t |d(u\varphi_x(u))|$．这个积分等于

$$\int_0^t \left|\frac{3}{2}\sqrt{t}\ \sin\frac{1}{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\cos\frac{1}{t}\right|dt\geqslant\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t \left|\cos\frac{1}{t}\right|dt-t^{\frac{3}{2}}$$

而不等于 $O(t)$．因此，楊格定理中的主要条件(ii)不成立．

最后証明楊格定理并不含在伐賴普山定理之中．簡写 $\log\frac{1}{t}$ 为 (lt)．置 $x=0$，当 t 很小时，$\varphi_x(t)=\sin(lt)/(lt)$，那末

$$\int_0^t |d(u\varphi_x(u))|=\int_0^t \left|\frac{\sin(lu)}{(lu)}-\frac{\cos(lu)}{(lu)}+\frac{\sin(lu)}{(lu)^2}\right|du=O(t).$$

由楊格的定理，$\mathfrak{S}[\varphi_x,0]=\mathfrak{S}[f,0]=0$．但是，我們可以証明

$$\chi(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \frac{\sin(lu)}{(lu)}du$$

在 $[0,\varepsilon]$ 中，并非有界变差．事实上，

$$\chi(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{(lu)}\cdot\frac{1}{2}\frac{d}{du}\{u[\cos(lu)+\sin(lu)]\}du$$

$$=\frac{\cos(lt)+\sin(lt)}{2(lt)}-\frac{1}{t}\int_0^t \frac{\cos(lt)+\sin(lt)}{2(lt)^2}dt,$$

末项是 $O((lt)^{-2})(t\to 0)$．因此，

$$\chi'(t)=\frac{\varphi_x(t)-\chi(t)}{t}=\frac{\sin(lt)-\cos(lt)}{2t(lt)}+O\left[\frac{1}{t(\log t)^2}\right],$$

末项属于 $L(0,\varepsilon)$．我們要証积分

$$\int_0^\varepsilon \left|\frac{\sin(lt)-\cos(lt)}{2t(lt)}\right|dt=\int_{\log\frac{1}{\varepsilon}}^\infty \left|\frac{\sin v-\cos v}{v}\right|dv$$

是发散的．实际上，設 k 是一自然数，則因

$$\int_{2k\pi-\frac{\pi}{4}}^{2k\pi}\frac{|\cos v-\sin v|}{v}\,dv>\frac{1}{2k\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}|\cos v-\sin v|\,dv>\frac{1}{8k},$$

关于 k 相加，就知道 $\int^{\infty}|\sin v-\cos v|v^{-1}\,dv=\infty$，由是

$$\int_0^2|\chi'(t)|\,dt=\infty,$$

$\chi(t)$ 在 $[0,\ \delta]$ 上不是有界变差，伐賴普山的条件不成立．定理証毕．

7. 勒貝格的收斂定理

下面的收斂定理是包括前述一切收斂定理的．

勒貝格定理　当 $\eta\to+0$ 时，假如下面两个条件：

(i)　$$\int_0^{\eta}|\varphi_x(t)|\,dt=o(\eta),$$

(ii)　$$\int_{\eta}^{\pi}|\varphi_x(t+\eta)-\varphi_x(t)|\,t^{-1}dt=o(1)$$

都成立，那末 $\mathfrak{S}[f;x]$ 收斂于 $f(x)$．

【証明】 (i) 是对于几乎一切 x 成立的；(ii) 中的 π，可以换做任意的正数．事实上，当 r 是一有理数时，关系

$$\frac{1}{\eta}\int_0^{\eta}|f(x+t)-r|\,dt\to|f(x)-r|$$

不成立的 x，成一零集 E_r，和集 $E=\sum\limits_r E_r$ 也是零集．假如 $x\overline{\in}E$，那末对于 $\varepsilon>0$，存在有理数 r 适合 $|f(x)-r|<\varepsilon$，又有 η 适合

$$\frac{1}{\eta}\int_0^{\eta}f(x+t)-r|\,dt<\varepsilon,$$

从而

$$\frac{1}{\eta}\int_0^{\eta}|f(x+t)-f(x)|\,dt$$
$$\leqslant\frac{1}{\eta}\int_0^{\eta}|f(x+t)-r|\,dt+\frac{1}{\eta}\int_0^{\eta}|f(x)-r|\,dt<2\varepsilon.$$

由是，当 $x\overline{\in}E$ 时，(i) 成立．

現在要从(i)和(ii)导出 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$．簡写

$$\eta=\frac{\pi}{n},\quad h(t)=\frac{\varphi_x(t)}{2\tan\frac{t}{2}},$$

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x),\qquad A_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

那末

$$2\pi\left[S_n(x)-\frac{1}{2}A_n(x)-f(x)\right]=2\int_0^{\pi}h(t)\sin nt\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}h(t)\sin nt\,dt-\int_{-\eta}^{\pi-\eta}h(t+\eta)\sin nt\,dt$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4,$$

这里

$$I_1=\int_{\eta}^{\pi-\eta}\{h(t)-h(t+\eta)\}\sin nt\,dt,$$

而 I_2, I_3 和 I_4 分别表示函数 $h(t)\sin nt$ 在 $(0,\eta)$, $(\pi-\eta,\pi)$ 和 $(0,2\eta)$ 上的积分，最后的 I_4 就是

$$-\int_{-\eta}^{\eta}h(t+\eta)\sin nt\,dt.$$

当 $n\to\infty$ 时，显而易見 $I_3=o(1)$；由(i)，

$$|I_2|+|I_4|\leqslant 2n\int_0^{2\eta}|\varphi_x(t)|dt=o(1).$$

由于

$$|I_1|\leqslant\int_{\eta}^{\pi-\eta}\frac{|\varphi_x(t)-\varphi_x(t+\eta)|}{2\tan\frac{t+\eta}{2}}dt$$

$$+\int_{\eta}^{\pi-\eta}|\varphi_x(t)|\left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}}-\frac{1}{2\tan\frac{t+\eta}{2}}\right]dt$$

$$<\int_{\eta}^{\pi}\frac{|\varphi_x(t)-\varphi_x(t+\eta)|}{t}dt+\int_{\eta}^{\pi}\frac{\sin\frac{\eta}{2}|\varphi_x(t)|}{2\sin\frac{t}{2}\sin\frac{t+\eta}{2}}dt,$$

所以从(ii)得到

$$|I_1|\leqslant o(1)+\int_\eta^\pi \frac{\frac{1}{2}\eta|\varphi_x(t)|}{2\left(\frac{2}{\pi}\frac{t}{2}\right)\left(\frac{2}{\pi}\frac{t+\eta}{2}\right)}dt=O\left(\int_\eta^\pi \eta\frac{|\varphi_x(t)|}{t^2}dt\right).$$

括弧中的积分等于

$$\left[\frac{\eta}{t^2}\int_0^t|\varphi_x(u)|du\right]_\eta^\pi+2\eta\int_\eta^\pi\int_0^t|\varphi_x(u)|du\frac{dt}{t^3}=o(1).$$

总結起来,得到

$$2\pi\left(S_n(x)-\frac{1}{2}A_n(x)-f(x)\right)=o(1),$$

从而

$$S_n(x)\to f(x).$$

証明完毕.

系 1 假如 $f(x)$ 的連續模 $\omega(f;\delta)$ 是 $o\left(1\Big/\log\frac{1}{\delta}\right)$,那末 $\mathfrak{S}[f]$ 匀斂于 $f(x)$.

【証明】 从定理的証明,我們断言: $I_2+I_3+I_4$ 是匀斂于 0 的,并且

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}I_1+o(1),$$

这里的 $o(1)$ 是匀斂于 0 的. 但是

$$|I_1|<\int_\eta^\pi\frac{|\varphi_x(t)-\varphi_x(t+\eta)|}{t}dt+o(1)$$

中的 $o(1)$ 也是匀斂于 0 的. 从而

$$|I_1|<2\int_\eta^\pi\omega(f,\eta)\frac{dt}{t}+o(1)=2\omega(f,\eta)\log\frac{\pi}{\eta}+o(1).$$

这就完成了系的証明.

我們称系 1 为**狄尼-李普希茲定理**. 由系 1 可知: 函数族 $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(\alpha>0)$ 中函数 f 的 $\mathfrak{S}[f]$ 匀斂于 $f(x)$.

在条件(i)的假設下,对于 $S_n(x)$ 我們能說些什么呢?

系 2 假如(i)成立,那末 $S_n(x)=o(\log n)$.

【証明】 由于

$$\int_{\eta}^{\pi}|\varphi_x(t+\eta)-\varphi_x(t)|t^{-1}dt=\left[t^{-1}\int_0^t|\varphi_x(\eta+u)-\varphi_x(u)|\,du\right]_{\eta}^{\pi}$$

$$+\int_{\eta}^{\pi}t^{-2}\int_0^t|\varphi_x(\eta+u)-\varphi_x(u)|\,du\,dt,$$

所以在(i)的条件下，此积分是

$$O(1)+\int_{\eta}^{\pi}o\left(\frac{1}{t}\right)dt=O(1)+o\left(\log\frac{1}{\eta}\right)=o(\log n).$$

因此从系1的証明，得到所要的結果.

对于共軛級数，用类似的方法可以建立类似的結果：

系 3 当 $t\to 0$ 时，假如

$$\int_0^t|\psi_x(u)|du=o(t),\quad \int_t^{\pi}|\psi_x(t+u)-\psi_x(u)|u^{-1}du=o(1),$$

那末

$$\overline{S}_n(x)-\overline{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right)=o(1).$$

从第一个条件只能得到 $\overline{S}_n(x)=o(\log n)$.

勒貝格曾經預料，他的收斂定理含有伐賴普山的定理，但是他沒有发表証明. 后来哈戴(1919)証明勒貝格的預料是眞理：

定理 当

(i) $$\int_0^t|\varphi_x(u)|du=o(t)\quad(t\to+0)$$

时，条件

(ii) $$\int_{\eta}^{\pi}|\varphi_x(t+\eta)-\varphi_x(t)|t^{-1}dt=o(1)$$

等价于

(iii) $$\int_{\eta}^{\pi}\left|\frac{\varphi_x(t+\eta)}{t+\eta}-\frac{\varphi_x(t)}{t}\right|dt=o(1).$$

当

$$\chi(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\varphi_x(u)du$$

为有界变差时，(i)和(ii)都成立.

【証明】 (ii)和(iii)的差不大于

$$\int_{\eta+\delta}^{\pi}\frac{|\varphi_x(t+\eta)-\varphi_x(t)|}{t}dt+\int_{\eta+\delta}^{\pi}\left|\frac{\varphi_x(t+\eta)}{t+\eta}-\frac{\varphi_x(t)}{t}\right|dt$$
$$+\int_{\eta}^{\eta+\delta}\frac{\eta|\varphi_x(t+\eta)|}{t(t+\eta)}dt<\frac{1}{\eta+\delta}\int_0^{\pi}|\varphi_x(t+\eta)-\varphi_x(t)|dt$$
$$+\int_{\delta}^{\pi}\left|\frac{\varphi_x(t+\eta)}{t+\eta}-\frac{\varphi_x(t)}{t}\right|dt+\int_{\eta}^{\eta+\delta}\frac{\eta}{t(t+\eta)}d\int_{\eta}^{t}|\varphi(u+\eta)|du.$$

第一第二两項的和是 $o(1)$. 末項等于

$$\frac{\eta}{(\eta+\delta)(2\eta+\delta)}\int_{\eta}^{\eta+\delta}|\varphi_x(t+\eta)|dt+\int_{\eta}^{\eta+\delta}\frac{\eta^2+2\eta t}{t^2(t+\eta)^2}\int_{\eta}^{t}|\varphi_x(v+\eta)|dv\,dt$$
$$\leqslant\frac{1}{2\eta+\delta}\int_0^{2\eta+\delta}|\varphi_x(t)|dt+\int_{\eta}^{\eta+\delta}\frac{1}{t+\eta}\int_0^{t+\eta}|\varphi_x(u)|du\frac{2\eta dt}{t^2}.$$

对于 $\varepsilon>0$, 取 δ 很小,可使上式小于

$$\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\eta}{3}\varepsilon\int_{\eta}^{\eta+\delta}\frac{dt}{t^2}<\varepsilon.$$

由是可知(ii)和(iii)是等价的.

由于 $\chi(t)=o(1)\ (t\to0)$, 所以从

$$\varphi_x(t)\doteq\chi(t)+t\chi'(t)$$

得到

$$\frac{1}{t}\int_0^t|\varphi_x(u)|du\leqslant\frac{1}{t}\int_0^t|\chi(t)|dt+\int_0^t|\chi'(t)|dt=o(1).$$

因之,(ii)等价于(iii). 由是,我們只要証明(iii)就好了.

函数 $\chi'(t)$是可以积分的,从而

$$\int_{\eta}^{\pi}|\chi'(t+\eta)-\chi'(t)|dt=o(1).$$

这是等价于

$$\int_{\eta}^{\pi}\left|\frac{\chi(t+\eta)-\chi(t)}{t}\right|dt=o(1)$$

的,事实上,

$$\int_0^t|\chi'(u)|du=o(t).$$

将上面的积分写成

$$\int_{\eta}^{\pi}\left|\frac{\chi(t+\eta)-\chi(t)}{t}\right|dt=\int_{\eta}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}=I_1+I_2\quad(2\eta<\delta<\pi).$$

这里

$$I_1=\int_\eta^\delta \frac{dt}{t}\left|\int_t^{t+\eta}\chi'(u)du\right|\leqslant\int_\eta^\delta \frac{dt}{t}\int_t^{t+\eta}|\chi'(u)|du$$

$$=\left[\log t\cdot\int_t^{t+\eta}|\chi'(u)|du\right]_\eta^\delta-\int_\eta^\delta \log t\,[|\chi'(t+\eta)|-|\chi'(t)|]dt$$

$$=\int_\eta^{2\eta}\log\frac{t}{\eta}|\chi'(t)|dt+\int_{2\eta}^\delta \log\frac{t}{t-\eta}|\chi'(t)|dt$$

$$+\int_\delta^{\delta+\eta}\log\frac{\delta}{t-\eta}|\chi'(t)|dt$$

$$<\log 2\left\{\int_\eta^{2\eta}+\int_{2\eta}^\delta+\int_\delta^{\delta+\eta}\right\}|\chi'(t)|dt=\log 2\int_\eta^{\delta+\eta}|\chi'(t)|dt.$$

对于 $\varepsilon>0$，取 δ 很小，可使 $I_1<\frac{1}{2}\varepsilon$. 固定 δ，取 η_0 适当小，使当 $\eta<\eta_0$ 时 $I_2<\frac{1}{2}\varepsilon$. 由是，当 $\eta<\eta_0$ 时，

$$\int_\eta^\pi \frac{|\chi(t+\eta)-\chi(t)|}{t}dt<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

定理証毕.

勒貝格的定理，是包含楊格的定理的，将于下节闡明；但是从

$$\varphi_x(t)=o(1)\ \ 和\ \int_0^t|d(u\varphi(u))|=O(t)$$

来导出勒貝格的条件，比較容易.

哈代定理 如果函数 $f(x)$ 在点 x 具有連續性的話，楊格的条件含有勒貝格的条件.

【証明】 由于函数 $g(t)=t\varphi_x(t)$ 在区間 $[0, t]$ 上的全变差是 $O(t)$，所以存在着如下的增加函数 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$：

$$g(t)=g_1(t)-g_2(t),\quad g_1(t)=O(t),\quad g_2(t)=O(t).$$

写着

$$J=\int_\eta^{k\eta}|\varphi_x(t+\eta)-\varphi_x(t)|t^{-1}dt\quad(0<k\eta<\pi),$$

$$J_i=\int_{k\eta}^\pi\left|\frac{g_i(t+\eta)}{t+\eta}-\frac{g_i(t)}{t}\right|\frac{dt}{t}\quad(i=1, 2),$$

那末勒貝格的积分

$$I=\int_{\eta}^{\pi}|\varphi_x(t+\eta)-\varphi_x(t)|t^{-1}\,dt$$

不大于 $J+J_1+J_2$. 由于,当 $\eta\to 0$ 时,

$$J\leqslant 2\max_{0\leqslant t\leqslant k\eta+\eta}|\varphi_x(t)|\int_{\eta}^{k\eta}t^{-1}\,dt=o(1),$$

所以我們只要証明 $J_1+J_2=o(1)$ 就得到 $I=o(1)$, 現在——$g_i(t)$ 是一个增加函数——

$$J_i\leqslant\int_{k\eta}^{\pi}\frac{g_i(t+\eta)-g_i(t)}{t(t+\eta)}\,dt+\int_{k\eta}^{\pi}g_i(t)\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+\eta}\right)\frac{1}{t}\,dt$$
$$=\int_{(k+1)\eta}^{\pi+\eta}\frac{g_i(t)\,dt}{t(t-\eta)}-\int_{k\eta}^{\pi}\frac{g_i(t)\,dt}{t(t+\eta)}+O\left(\log\frac{k+1}{k}\right).$$

以 $t+\eta$ 代第一項中的 $t-\eta$, 相差不过

$$\int_{(k+1)\eta}^{\pi+\eta}\frac{g_i(t)}{t}\left[\frac{1}{t-\eta}-\frac{1}{t+\eta}\right]dt=O\left[\int_{(k+1)\eta}^{\pi+\eta}\frac{2\eta\,dt}{t^2-\eta^2}\right]=O\left(\log\frac{k+1}{k}\right),$$

因此,

$$J_i=O\left(\log\frac{k+1}{k}\right)+\left[\int_{\pi}^{\pi+\eta}-\int_{k\eta}^{(k+1)\eta}\frac{g_i(t)\,dt}{t(t+\eta)}\right]$$
$$=O\left(\frac{1}{k}\right)+O\left(\int_{\pi}^{\pi+\eta}\frac{dt}{t+\eta}\right).$$

首先取 k 足够大, 然后取 η 很小, 我們可使 J_1+J_2 任意地小, 从而 $I=o(1)$. 証明完毕.

8. 勒貝格定理的拓广

1927 年,坡拉特(S. Pollard) 在倫敦数学会的期刊上,拓广勒貝格的收斂定理为如下的形式: 当 $\int_0^t\varphi_x(u)\,du=o(t)$ 时, 假如

$$(\mathrm{C}_0)\qquad \lim_{k\to\infty}\limsup_{t\to 0}\int_{kt}^{\pi}\left|\frac{\varphi_x(t+u)}{t+u}-\frac{\varphi_x(u)}{u}\right|du=0,$$

那末 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$. 坡拉特并且証明, 这个定理包含楊格的收斂定理. 1928 年,哈戴和立脱尔伍德(Littlewood)在德国的数学时刊(Math. Zeits.)上,指出:勒貝格的(主要)收斂条件似乎可以改进为

(C) $$\lim_{k\to\infty}\limsup_{t\to 0}\int_{kt}^{\pi}|\varphi_x(t+u)-\varphi_x(u)|u^{-1}du=0,$$

但是，第一个条件 $\int_0^t|\varphi_x(u)|du=o(t)$ 中的 $|\varphi_x(u)|$，是否可以改成 $\varphi_x(u)$，不容易作肯定的断語．这些問題，在 1930 年，为日尔斤 (J. F. Gergen) 全部解决，詳見数学季刊第一卷 (Quarterly Journal of Math. 1)．他的定理是这样的：

定理 当 $\int_0^t\varphi_x(u)du=o(t)$ 时，(C)含有 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$．(C_0) 成立的話，(C)也成立．

【証明】 設 $k>0$, $n\eta=\pi$, $J(\eta)=\int_0^{\pi}\sin nt\cdot\varphi_x(t)t^{-1}dt$，則

$$4J(\eta)=\left(\int_0^{k\eta}+\int_{k\eta}^{\pi}\right)+2\left(\int_0^{(k+1)\eta}+\int_{(k+1)\eta}^{\pi+\eta}-\int_{\pi}^{\pi+\eta}\right)$$
$$+\left(\int_0^{(k+2)\eta}+\int_{(k+2)\eta}^{\pi+2\eta}-\int_{\pi}^{\pi+2\eta}\right).$$

我們要証 $J(\eta)=o(1)$．在楊格定理的証明中，我們見到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{k\eta}\frac{\varphi_x(t)}{t}\sin nt\,dt=0.$$

由是可知

$$4J(\eta)=\left\{\int_{k\eta}^{\pi}+2\int_{(k+1)\eta}^{\pi+\eta}+\int_{(k+2)\eta}^{\pi+2\eta}\right\}+o(1)$$
$$=\int_{k\eta}^{\pi}\left\{\frac{\varphi_x(t)}{t}-2\,\frac{\varphi_x(t+\eta)}{t+\eta}+\frac{\varphi_x(t+2\eta)}{t+2\eta}\right\}\sin nt\,dt+o(1)$$
$$=\int_{k\eta}^{\pi}\left[\frac{\Delta_\eta\varphi_x(t+\eta)}{t+2\eta}-\frac{\Delta_\eta\varphi_x(t)}{t}\right]\sin nt\,dt+o(1)$$
$$+\int_{k\eta}^{\pi}\left[\frac{1}{t+2\eta}-\frac{2}{t+\eta}+\frac{1}{t}\right]\varphi(t+\eta)\sin nt\,dt.$$

分别用 $J_1(\eta)$ 和 $J_2(\eta)$ 表示第一个和末一个积分，我們見到

$$|J_1(\eta)|\leqslant\int_{(k+1)\eta}^{\pi+\eta}\frac{|\Delta_\eta\varphi_x(t)|}{t+\eta}dt+\int_{k\eta}^{\pi}\frac{|\Delta_\eta\varphi_x(t)|}{t}dt$$
$$\leqslant 2\int_{k\eta}^{\pi}\frac{|\Delta_\eta\varphi_x(t)|}{t}dt+o(1).$$

在(C)的条件下，这是 $o(1)$．写 $\varphi_x(u)$ 在 $(0,t)$ 上的积分为 $t\chi(t)$，那末

$J_2(\eta)$等于

$$\int_{k\eta}^{\pi}\frac{2\eta^2\varphi_x(t+\eta)\sin nt\,dt}{t(t+\eta)(t+2\eta)}$$

$$=\left[\frac{2\eta^2\sin nt\cdot\chi(t+\eta)}{t(t+2\eta)}\right]_{k\eta}^{\pi}-2\eta^2\int_{k\eta}^{\pi}\frac{\chi(t+\eta)n\cos nt\,dt}{t(t+2\eta)}$$

$$+2\eta^2\int_{k\eta}^{\pi}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+\eta}+\frac{1}{t+2\eta}\right)\frac{(t+\eta)\chi(t+\eta)\sin nt}{t(t+\eta)(t+2\eta)}dt$$

$$=o(1)+O\left(\int_{k\eta}^{\pi}\frac{2\eta dt}{t(t+2\eta)}\right)+O\left(\int_{k\eta}^{\pi}\frac{\eta^2dt}{t^2(t+2\eta)}\right)=O\left(\frac{1}{k}\right)=o(1).$$

最后，我們从(C_0)导出(C)．由于

$$\frac{\Delta_\eta\varphi_x(t)}{t}=\frac{\varphi_x(t+\eta)}{t}-\frac{\varphi_x(t+\eta)}{t+\eta}+\frac{\varphi_x(t+\eta)}{t+\eta}-\frac{\varphi_x(t)}{t}$$

$$=\frac{\eta\varphi_x(t+\eta)}{t(t+\eta)}+\Delta_\eta\frac{\varphi_x(t)}{t},$$

所以要从(C_0)导出(C)，只要証明

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{\eta\to+0}\int_{k\eta}^{\pi}\frac{\eta|\varphi_x(t+\eta)|dt}{t(t+\eta)}=0.$$

式中的积分等于——写着 $\Phi(t)=\frac{1}{t}\int_0^t|\varphi_x(u)|du$——

$$\left[\frac{\eta}{t}\Phi(t+\eta)\right]_{k\eta}^{\pi}-\eta\int_{k\eta}^{\pi}\Phi(t+\eta)(t+\eta)\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{t(t+\eta)}\right]dt$$

$$\leqslant\frac{\eta}{\pi}\Phi(\pi+\eta)+\int_{k\eta}^{\pi}\frac{\eta^2+2\eta t}{t^2(t+\eta)}\Phi(t+\eta)dt.$$

假如$\Phi(t)$是有界，那末上式等于$O(\eta)+O(k^{-1})$．因此，我們只須証明$\Phi(t)=O(1)$．

設$k>1$，則$x_n=\eta\left(\frac{k}{k+1}\right)^n$成一个单調减少的数列．由于

$$k\eta\Phi(k\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{kx_{n+1}}^{kx_n}|\varphi_x(u)|du\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}kx_n\int_{kx_{n+1}}^{kx_n}|\varphi_x(u)|u^{-1}du,$$

并且最后的积分可以写成

$$\left(\int_{kx_{n+1}}^{\pi}+\int_{\pi}^{\pi+x_{n+1}}-\int_{kx_n}^{\pi+x_{n+1}}\right)|\varphi_x(u)|u^{-1}du$$

$$=\int_{kx_{n+1}}^{\pi}\left\{\frac{|\varphi_x(u)|}{u}-\frac{|\varphi_x(u+x_{n+1})|}{u+x_{n+1}}\right\}du+\int_{\pi}^{\pi+x_{n+1}}\frac{|\varphi_x(u)|}{u}du$$

$$\leqslant\max_{0<y<\eta}\int_{ky}^{\pi}\left|\Delta_y\frac{\varphi_x(u)}{u}\right|du+\int_{\pi}^{\pi+\eta}\frac{|\varphi_x(u)|}{u}du.$$

从(C_0)，存在如下的k_0：当$k\geqslant k_0$时，

$$\limsup_{y\to 0}\int_{ky}^{\pi}\left|\Delta_y\frac{\varphi_x(u)}{u}\right|du<1.$$

取η足够小，可使上式中的积分当$0<y<\eta$时，小于2．因此当$y<\eta$，$k>k_0$时，成立着

$$\int_0^{ky}|\varphi_x(u)|du<k\left[2+\int_{\pi}^{\pi+\eta}|\varphi_x(u)|u^{-1}du\right]\sum_0^{\infty}x_n,$$

或是

$$\Phi(ky)<\left[2+\int_{\pi}^{\pi+\eta}|\varphi_x(u)|u^{-1}du\right](k+1).$$

从而$\Phi(t)=O(1)$．定理証毕．

从$\Phi(t)=O(1)$的証明，我們見到

$$\frac{1}{k\eta}\int_0^{k\eta}|\varphi_x(u)|du\leqslant(k+1)\left[\max_{0<y<\eta}\int_{ky}^{\pi}\left|\Delta_y\frac{\varphi_x(u)}{u}\right|du+\int_{\pi}^{\pi+\eta}\frac{|\varphi_x(u)|}{u}du\right].$$

由是可述如下的

系 1　关系

$$\lim_{t\to 0}\int_t^{\pi}\left|\Delta_t\frac{\varphi_x(u)}{u}\right|du=0$$

包含着$\Phi(t)=o(t)$，从而包含着$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$．

从(C)虽不能断定$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$，但是日尔斤定理中的“連續性条件”$\chi(t)=o(1)$可以减輕为

$$\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t(t-u)^{r-1}\varphi_x(u)du=o(t^r),$$

这里r是一个正整数．这也是日尔斤証明的．

从日尔斤的定理，还可以导出哈戴-立脫尔伍德的收斂定理(Math. Zeits. 28, 1928)：

系 2 設 $\chi(t)=o(1)\ (t\to 0)$，$p\geqslant 1$，則当

$$\int_0^\pi |\varphi_x(t+u)-\varphi_x(u)|^p\,du=O(|t|)$$

时，$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$.

【証明】 首先对于 $p=1$ 来証明系 2. 設 $\lambda>1$，$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=1$，那末，

$$\int_{k\eta}^\pi \frac{|\Delta_\eta\varphi_x(t)|}{t}\,dt\leqslant\left(\int|\Delta_\eta\varphi_x(t)|^\lambda\,dt\right)^{\frac{1}{\lambda}}\cdot\left(\int\frac{dt}{t^\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

最后的积分小于 $\frac{1}{\mu-1}(k\eta)^{1-\mu}$. 令 $\lambda\to 1$，則上式变成

$$\int_{k\eta}^\pi \frac{|\Delta_\eta\varphi_x(t)|}{t}\,dt\leqslant\frac{1}{k\eta}\int_0^\pi|\Delta_\eta\varphi_x(t)|\,dt.$$

这是 $o(1)\ (\eta\to 0)$. 从而 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$.

假如 $p>1$，那末写着 $\lambda=p$，$\mu=q$. 从而得到

$$\int_{k\eta}^\pi \frac{|\Delta_\eta\varphi_x(t)|}{t}\,dt\leqslant\left(\frac{1}{q-1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{k\eta}\int_0^\pi|\Delta_\eta\varphi_x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}=O\left(\frac{1}{k^{\frac{1}{p}}}\right).$$

当 $k\to\infty$ 时，上式的极限等于 0. 証明完毕.

系 3 系 2 的哈戴-立脫尔伍德定理含有若当定理而不含有狄尼定理.

【証明】 設 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的全变差 V 是有限的，那末我們不妨假設

$$\omega(x)=|f(x+0)-f(x-0)|<1\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

将 $[0,\pi]$ 等分为 n 个区間 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$；$u_\nu$ 是 δ_ν 中的一个点. 当 $|t|$ 足够小的时候，成立着

$$|f(u_\nu+t)-f(u_\nu)|^p\leqslant|f(u_\nu+t)-f(u_\nu)|,$$

由是可得

$$\int_0^\pi|f(t+u)-f(u)|^p\,du\leqslant\int_0^\pi|f(t+u)-f(u)|\,du.$$

最后的积分等于

$$\int_0^\pi\left|\int_u^{u+t}df(v)\right|du\leqslant\int_0^\pi\int_u^{u+t}|df(v)|\,du\leqslant\int_0^{\pi+t}|df(v)|\int_{v-t}^v du\leqslant 2|t|V.$$

因此

$$\int_0^{\pi}|f(t+u)-f(u)|^p du=O(|t|).$$

这就証明：系3包含着若当定理；但是它并不含有狄尼的定理．事实上，設 $0<2\alpha p<1$，函数

$$f(-x)=f(x)=x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}\quad(0\leqslant x<\pi)$$

在点 $x=0$ 是适合狄尼条件的．但是

$$\int_0^{\pi}|f(u+t)-f(u)|^p du=\int_0^{\pi}(u+t)^{\alpha p}\left|\sin\frac{1}{u+t}-\sin\frac{1}{u}\right|^p du+O(t),$$

$$\sin\frac{1}{u+t}-\sin\frac{1}{u}=2\cos\frac{2u+t}{2u(u+t)}\sin\frac{t}{2u(u+t)}.$$

写着 $t/2u(u+t)=w$，则 $u=-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{t^2+\frac{2t}{w}}$，积分变成

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha p+1}\int_T^{\infty}\left(t+\sqrt{t^2+\frac{2t}{w}}\right)^{\alpha p}\left|\cos\sqrt{w^2+\frac{2w}{t}}\sin w\right|^p\cdot\frac{\sqrt{tw}\,dw}{w^2(tw+2)^{\frac{1}{2}}},$$

这里 $T=\frac{t}{2\pi(\pi+t)}$．由于 $\alpha p<\frac{1}{2}$，所以这个积分大于 $t^{\frac{1}{2}+\alpha p}$ 的常数倍，不是 $O(t)$．

9．累次平均函数

写着 $\phi_0(t)=\varphi_x(t)$——固定 x——

$$\phi_1(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\phi_0(u)du,$$

称 $\phi_1(t)$ 为 $\phi_0(t)$ 的**平均函数**．$\phi_1(t)$ 的平均函数未必存在，例如 $\phi_0(t)=1/t\log^2 t$ 的話，

$$\phi_1(t)=\frac{-1}{t\log t}\in L\left(0,\frac{1}{2}\right).$$

从而 $\phi_1(t)$ 沒有平均函数．另一方面，当 $\phi_1(t)$ 的平均函数

$$\phi_2(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\phi_1(u)du\quad(t>0)$$

存在时，我們称 $\phi_2(t)$ 为 $\phi_0(t)$ 的**二次平均函数**．一般地說：当 $\phi_{r-1}(t)$

的平均函数

$$\phi_r(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \phi_{r-1}(u)du \quad (0\leqslant t\leqslant \pi)$$

存在时，我們称 $\phi_r(t)$ 是 $\phi_0(t)$ 的 r **次平均函数**；并且規定

$$\phi_r(-t)=\phi_r(t)=\phi_r(2\pi+t).$$

定理 1[*] 对于 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$，两个条件

(i) $\phi_2(t)$ 存在而满足 $\phi_2(t)=o(1) \quad (t\to 0)$，

(ii) $n\int_0^\pi \phi_1(t)\cos nt\,dt=o(1) \quad (n\to\infty)$

是必要的而且是充分的．

【証明】 首先假設 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$，我們要导出(i)和(ii)．設 $\mathfrak{S}[f;x]$ 是 $\sum A_n(x)=\sum A_n$，那末

$$\phi_0(t)\sim\sum A_n\cos nt.$$

調整 A_0 和 A_1，我們可以假設 $A_0=0$，$\sum_{n=1}^{\infty}A_n=0$．这样，从等式

$$\frac{1}{t^2}\int_0^t\int_0^u \phi(v)dv\,du=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{1-\cos nt}{n^2t^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{\sin\frac{1}{2}nt}{\frac{1}{2}nt}\right)^2,$$

就可以証明上式左端是 $o(1)\ (t\to 0)$．事实上，由于

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2=2\,\frac{\sin u}{u}\,\frac{u\cos u-\sin u}{u^2}=\begin{cases}O(1) & (0<u\leqslant 1),\\ O(u^{-2}) & (u>1),\end{cases}$$

所以有常数 A 适合于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta\left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^2\right|\leqslant A\sum_{n=1}^{\infty}t\min(1,\ (nt)^{-2})$$
$$=At\left[\sum_{n<t^{-1}}1+\sum_{n>t^{-1}}(nt)^{-2}\right]\leqslant 2A.$$

从而

$$\sum_{n=N}^{\infty}A_n\left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^2=\sum_{N}^{\infty}(A_N+A_{N+1}+\cdots+A_n)\Delta\left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^2$$
$$\leqslant 2A\max_{n\geqslant N}|A_N+A_{N+1}+\cdots+A_n|.$$

---

[*] 著者，(日本)东北数学杂志 32(1930)．

固定 N，当 $t\to 0$ 时，

$$\sum_{n=1}^{N-1} A_n\left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^2 \to \sum_{n=1}^{N-1} A_n.$$

取适当大的 N，可使 $\sum_{n=1}^{N-1} A_n$ 和 $\max_{n\geq N}|A_N+\cdots+A_n|$ 都很小．这就証明了

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\int_0^t\int_0^u \phi(v)\,dv\,du=0.$$

設 $\delta\to +0$，则从

$$\int_\delta^t \frac{1}{u}\int_0^u \phi_0(v)\,dv\,du=\left[\frac{1}{u}\int_0^u\int_0^u \phi_0(v)\,dv\,du\right]_\delta^t+\int_\delta^t \frac{1}{u^2}\int_0^u\int_0^u \phi_0(v)\,dv\,du,$$

知道

$$\phi_2(t)=\frac{1}{t^2}\int_0^t\int_0^u \phi_0(v)\,dv\,du+\frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{u^2}\int_0^u\int_0^u \phi_0(v)\,dv\,du$$

存在，并且获得(i)．从(i)得到

$$\int_0^\pi \phi_1(t)\frac{\sin nt}{t}\,dt=-\int_0^\pi t\,\phi_2(t)\frac{d}{dt}\,\frac{\sin nt}{t}\,dt.$$

这就說明上式左端的积分是有意义的．另一方面，由假設，

$$\int_0^\pi \phi_0(t)\frac{\sin nt}{t}\,dt=o(1)\quad (n\to\infty),$$

左端等于

$$-\int_0^\pi \phi_1(t)\,t\,\frac{d}{dt}\,\frac{\sin nt}{t}\,dt$$

$$=\int_0^\pi \phi_1(t)\left(\frac{\sin nt}{t}-n\cos nt\right)dt=o(1),$$

从而知道积分

$$\beta_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \phi_1(t)\cos nt\,dt\quad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

都依某种意义存在*)，并且得到

(1) $$\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_n=n\beta_n+o(1).$$

置(1)的左端为 t_n，利用狄里克莱积分得到

---

*) 当 $n=1$ 时，知 β_0 的存在；逐步知道 β_1, β_2, …都存在：$\int_0^\pi\cdots dt=\lim_{\delta\to+0}\int_\delta^\pi\cdots dt$.

$$t_0+t_1+\cdots+t_{n-1}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \phi_1(t)\left(\frac{\sin\frac{1}{2}nt}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t\phi_2(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}nt}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt+O(1)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t\cot\frac{t}{2}\,\phi_2(t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$

$$-\frac{n}{2\pi}\int_0^\pi t\,\phi_2(t)\,\frac{\sin nt}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt+O(1).$$

第一項的絕对值不大于

$$\max_{0<t<\delta} t\cot\frac{t}{2}\,|\phi_2(t)|\,\int_0^\delta\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt+O\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

$$=O(n\max_{0<t<\delta}|\phi_2(t)|)+O\left(\frac{1}{\delta}\right)=o(n).$$

从而得到

$$\frac{t_0+t_1+\cdots+t_{n-1}}{n}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\frac{t\,\phi_2(t)}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\frac{\sin nt}{\sin\frac{t}{2}}\,dt+o(1). \tag{2}$$

設

$$\frac{t\,\phi_2(t)}{\sin\frac{t}{2}}\sim\sum_{n=0}^\infty\gamma_n\cos nt,$$

那末(2)可以改写成

$$\frac{t_0+t_1+\cdots+t_n}{n+1}=-(\gamma_0+\gamma_1+\cdots+\gamma_n)+o(1).$$

将此式和(2)相結合而施行加法，我們得到

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\gamma_0+\gamma_1+\cdots+\gamma_k)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{t\phi_2(t)}{\sin\frac{t}{2}}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt=o(n),$$

从而得着

$$(3)\qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{t_0+\cdots+t_k}{k+1}=o(n).$$

从(1)和(3),得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_1+2\beta_2+\cdots+k\beta_k}{k+1}=o(n),$$

将此式与(3)边边相加,則成

$$\sum_{k=0}^{n}(\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_k)=o(n).$$

这就是 $t_0+t_1+\cdots+t_n=o(n)$. 利用(1),此式又可以写成

$$(4)\qquad \beta_1+2\beta_2+\cdots+n\beta_n=o(n).$$

将最后两式相加, 然后乘以 $\frac{1}{n+1}$, 就得到

$$\beta_0+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n=o(1).$$

从此式和(1)得到 $n\beta_n=o(1)$. 这就是(ii).

現在証明(i)和(ii)含有 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$. 由(ii)得 (4), 已經証明(i)含有(3). 从(3)和(4),得到

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\beta_1+2\beta_2+\cdots+k\beta_k}{k+1}+\frac{t_0+t_1+\cdots+t_k}{k+1}\right)=o(n),$$

或是

$$t_0+t_1+\cdots+t_n=o(n).$$

从而

$$(t_0+\cdots+t_n)+(\beta_1+2\beta_2+\cdots+n\beta_n)=o(n),$$

或是

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n=o(1).$$

这就是

$$\int_0^\pi \phi_1(t)\frac{\sin nt}{t}dt=o(1).$$

另一方面,从(ii)获得

$$(5)\qquad n\int_0^\pi \phi_1(t)\cos nt\,dt=-\int_0^\pi \frac{\phi_0(t)-\phi_1(t)}{t}\sin nt\,dt=o(1),$$

結合上面的結果,得着

$$\int_0^\pi \phi_0(t)\frac{\sin nt}{t}\,dt=o(1).$$

这个結果相当于 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$. 証明完毕.

从(5)知道: 当(i)成立时, $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$ 等价于

$$\mathfrak{S}[\phi_0-\phi_1;0]=0.$$

这个結果,可以拓广成如下的形式:

系 1 假如 $f(x)$ 在 x 的二次平均函数 $\phi_2(t)=o(1)$, 那末 $\mathfrak{S}[f;x]$ 和 $\mathfrak{S}[\Phi_k;0]$ 同时收斂或同时发散,这里

$$\Phi_k(t)=\phi_0(t)-k\phi_1(t)+\cdots+(-1)^k\phi_k(t)\quad (k\geqslant 1).$$

我們应該留意: 当 $\phi_2(t)=o(1)$ 时, $\phi_3(t)$, $\phi_4(t)$, …都存在.

系 2 当 $\phi_2(t)=o(1)$ 时, 任一收斂定理中的 $\varphi_x(t)$, 可以换做 $\Phi_k(t)$, 例如: 两条件

$$(6)\qquad \phi_2(t)=o(1)\ \text{和}\ \Phi_k(t)t^{-1}\in L(0,\pi)$$

含有 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$.

由于

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \Phi_{k-1}(u)du\right)=\frac{\Phi_k(t)}{t},$$

所以 $\dfrac{\Phi_k(t)}{t}\in L(0,\pi)$ 等价于 $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \Phi_{k-1}(u)du$ 为有界变差. 置 $k=1$, 我們就明白: 伐賴普山的定理是系 2 的一个特殊情况. 由是,就 $\Phi_k(t)$ 来說,狄尼定理并不逊于伐賴普山定理.

但是,将(6)和勒貝格的收斂条件相比較,孰优孰劣,还有待研究.

10. 連續和收斂

有界变差函数 $f(x)$ 的 $\mathfrak{S}[f]$ 是处处收斂, 但是 $f(x)$ 可能有不連續点,所以函数的連續性并非是富理埃級数收斂的必要性. 那末 $\mathfrak{S}[f]$ 在

f 的連續点，是否一定收斂呢？十九世紀初叶的人，大率相信：連續函数的富理埃級数是到处收斂的．到了 1876 年，波阿-賴伊蒙 (Du Bois Reymond) 証有如下的

定理 1　連續函数的富理埃級数未必到处收斂．

【証明】*)　設 $\sum a_r$ 是一个正項收斂級数，$\{N_r\}$ 是一个正整数的叙列，它們有如下的关系：

$$N_r > 3, \quad a_r \log N_r \to \infty.$$

于 $(-\infty, \infty)$ 上作如下的周期函数 $f(x)$：

$$f(-x) = f(x) \equiv f(x+2\pi);$$

設 $n_r = N_r n_{r-1}$，$n_0 = 1$；当 $\frac{\pi}{n_r} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{n_{r-1}}$ 时，

$$f(x) = a_r \sin n_r x \quad (r = 1, 2, \cdots).$$

由于 $f\left(\frac{\pi}{n_r}\right) = 0$ $(r = 0, 1, \cdots)$，所以 $f(0) = 0$ 的話，$f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上成一連續函数．但是，我們将証 $\mathfrak{S}[f]$ 在原点是发散的；事实上，我們能証：当 $k \to \infty$ 时，

$$J(k) = \int_0^\pi f(t) \frac{\sin n_k t}{t} dt \to \infty,$$

将 $J(k)$ 写成

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r \int_{\frac{\pi}{n_r}}^{\frac{\pi}{n_{r-1}}} \frac{\sin n_r t \cdot \sin n_k t}{t} dt,$$

又将其中的积分写做 $j_r(k)$，$S(k) = \sum_{r \neq k} a_r j_r(k)$，那末

$$J(k) = a_k j_k(k) + S(k).$$

由于

$$j_r(k) = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{n_r}}^{\frac{\pi}{n_{r-1}}} \frac{\cos|n_k - n_r| t - \cos(n_k + n_r) t}{t} dt,$$

所以

---

*) 这里的例子，是許瓦兹 (Schwarz) 所給的，参見哈戴-洛各浮斯基的《富理埃級数》(1956)，第 50 頁．

$$j_k(k)=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}}\frac{1-\cos 2n_k t}{t}dt=\frac{1}{2}\log N_k+O(1);$$

当 $r\neq k$ 时,

$$j_r(k)=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi|n_k-n_r|}{n_r}}^{\frac{\pi|n_k-n_r|}{n_{r-1}}}\frac{\cos u\,du}{u}-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi|n_k+n_r|}{n_r}}^{\frac{\pi|n_k+n_r|}{n_{r-1}}}\frac{\cos u}{u}du$$

$$\leqslant\left[\frac{n_r}{2\pi|n_k-n_r|}+\frac{n_r}{2\pi|n_k+n_r|}\right]\max_{A<B}\left|\int_A^B\cos u\,du\right|,$$

这里是应用了第二中値定理. 由是可知:当 $r\neq k$ 时,

$$j_r(k)<\frac{n_r}{\pi|n_r-n_k|}<\frac{1}{2\pi}.$$

从而,

$$S(k)<\frac{1}{2\pi}\sum a_r,$$

$$J(k)>\frac{a_k}{2}\log N_k-O(1)\to\infty.$$

定理証毕.

一般地説: 設 $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots$ 是 $[a,\ b]$ 上一列就范的直交函数. 設

$$f(x)\sim\sum c_n\varphi_n(x),\quad S_n(f;\ x)=\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\varphi_\nu(x),$$

則 $S_n(f;\ x)$ 等于

$$\int_a^b f(y)\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y)dy=\int_a^b f(y)\Phi_n(x,\ y)dy,$$

$$\Phi_n(x,\ y)=\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y).$$

我們称

$$\rho_n(x)=\int_a^b|\Phi_n(x,\ y)|dy$$

为 $\{\varphi_n(x)\}$ 的**勒貝格函数**. 当 $|f(x)|\leqslant 1$ 时, $|S_n(f;\ x)|\leqslant\rho_n(x)$.

对于 $[-\pi,\ \pi]$ 上的三角函数列

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\quad\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

来說，勒貝格函数

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\right|dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt$$

是常数，称这个常数 ρ_n 为**勒貝格常数**．$\{\rho_n\}$ 并不是有界的；事实上，

$$\rho_n\simeq\frac{4}{\pi^2}\log n.$$

这是因为 ρ_n 等于

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sin nt\cot\frac{t}{2}+\cos nt\right|dt=\sigma_n+O(1),$$

这里

$$\begin{aligned}\sigma_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sin nt\cot\frac{t}{2}\right|dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin nt}{t}\right|dt+O(1)\\&=\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\int_{m\pi}^{(m+1)\pi}\frac{|\sin u|}{u}du+O(1)=\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u+m\pi}du+O(1)\\&\simeq\frac{4}{\pi^2}\log n+O(1).\end{aligned}$$

由于这个事实，所以定理 1 是下述定理 2 的一个特殊情况．

定理 2　設 $\{\varphi_n(x)\}$ 的勒貝格函数是 $\rho_n(x)$；在点 x_0，假如

$$\limsup_{n\to\infty}\rho_n(x_0)=\infty,$$

那末必有 $f(x)\sim\sum c_n\varphi_n(x)$ 在 $x=x_0$ 发散．

【証明】　固定 n，置 $f(y)=\operatorname{sgn}\Phi_n(x_0,y)$，对于这个 f，

$$S_n(f;x_0)=\rho_n(x_0).$$

一般地說，这个 f 是不連續的．現在取連續函数 $f_n(y)$ 适合于

$$|f_n(y)|\leqslant 1\ \text{和}\ \int_a^b|[f(y)-f_n(y)]\Phi_n(x_0,y)|dy<\frac{1}{2}\rho_n(x_0),$$

那末

$$S_n(f_n;x_0)\geqslant\frac{1}{2}\rho_n(x_0).$$

假如有一个 f_n，它的富理埃級数 $\sum c_n\varphi_n(x)$ 在 x_0 发散，那末定理 2 已經成立．假如不然，f_n 的富理埃級数在 x_0 收斂于 γ_n，那末取适当的 n_1，

n_2, …以及正項收斂級数 $\sum a_k$, $\sum_{\nu=k+1}^{\infty} a_\nu < \frac{1}{6} a_k$, 作函数

$$F(y) = \sum a_k f_{n_k}(y).$$

取定了 $n_1, \cdots, n_{k-1}$ 之后,使 n_k 滿足下面几个关系:

$$a_k \rho_{n_k} \to \infty, \quad \sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu |\gamma_{n_\nu}| \leqslant \frac{1}{12} a_k \rho_{n_k};$$

由于 $\sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu f_{n_\nu}$ 的富理埃級数收斂于 $\sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu \gamma_{n_\nu}$, 所以取 n_k 足够大,可使

$$\left| S_{n_k}\left(\sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu f_{n_\nu}; x_0 \right) \right| \leqslant 2 \sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu |\gamma_{n_\nu}| \leqslant \frac{1}{6} a_k \rho_{n_k}.$$

注意着

$$\left| S_{n_k}\left(\sum_{\nu=k+1}^{\infty} a_\nu f_{n_\nu}; x_0 \right) \right| \leqslant \rho_{n_k}(a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots) \leqslant \frac{1}{6} a_k \rho_{n_k},$$

我們見到

$$S_{n_k}(F; x_0) \geqslant S_{n_k}(a_k f_{n_k}; x_0) - \frac{1}{6} a_k \rho_{n_k} - \frac{1}{6} a_k \rho_{n_k},$$

从而

$$S_{n_k}(F; x_0) \geqslant \frac{1}{6} a_k \rho_{n_k} \to \infty.$$

証明完毕.

11. 混合判定法

前述伐賴普山,楊格,勒貝格,以至日尔斤的各种收斂判定法,都是专靠函数 f 的"連續情况"而断言 $\mathfrak{S}[f; x]$ 的收斂的. 假如已經知道 $\mathfrak{S}[f]$ 的系数具有某种性质,那末結合函数的性质,可得混合判定法. 例如,哈戴和立脫尔伍德在 1932 年的倫敦数学会期刊上 [参見意大利的匹沙年刊(Annali, Pisa 3, 1934)]証有如下的

定理　假如 $\mathfrak{S}[f]$的系数是 $O(n^{-\delta})$ $(\delta>0)$, 那末在关系

$$f(x+t) - f(x) = o\left(\log \frac{1}{t}\right)^{-1} \quad (t \to +0) \tag{1}$$

成立的点 x, $\mathfrak{S}[f; x]$收斂于 $f(x)$.

我們应該注意：当 $\omega(f;\delta)=o\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1}$ $(\delta\to+0)$时，条件

$$\int_{\eta}^{\pi}\frac{|\varphi_x(t+\eta)-\varphi_x(t)|}{t}dt=o(1)$$

均匀地成立，从而 $\mathfrak{S}[f]$ 匀斂于$f(x)$. (1)虽然含有f在x的連續性，但是并不含有 $\mathfrak{S}[f;x]$收斂于$f(x)$，关于这一点，后面还有詳細的論述. 对于定理的証明，我們先建立两个引理.

引理 1 有界变差函数$f(x)$的富理埃級数的部分和$S_n(x)$是均匀有界的.

【証明】 我們知道，等式

$$S_n(f;x)\equiv S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}\sin nt\,dt+\eta_n(x)$$

中的$\eta_n(x)$是匀斂于0的. 設$p(x+t)$和$n(x+t)$是$f(x+t)$的正变差和負变差. 由第二中值定理，$(0,\pi)$中，有t_1和t_2适合于

$$\begin{aligned}\pi J_n&=\int_0^{\pi}f(x+t)\frac{\sin nt}{t}dt\\&=p(x+\pi)\int_{t_1}^{\pi}\frac{\sin nt}{t}dt-n(x+\pi)\int_{t_2}^{\pi}\frac{\sin nt}{t}dt.\end{aligned}$$

积分 $\int_{t_j}^{\pi}\sin nt\frac{dt}{t}$ 的絕对值等于

$$\left|\int_{nt_j}^{n\pi}\frac{\sin t}{t}dt\right|\leqslant\max_{0<\alpha<\beta}\left|\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin t}{t}dt\right|.$$

容易証明，后者小于π. 从而

$$|J_n|\leqslant p(x+\pi)+n(x+\pi)=V(x,x+\pi).$$

$V(a,b)$表示f在$[a,b]$上的全变差. 由于

$$V(x-\pi,x)+V(x,x+\pi)=V(-\pi,\pi),$$

所以$S_n(x)$是均匀有界的. 証明完毕.

引理 2 假如 $f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$是一个勒貝格-富理埃級数，那末对于$[a,b]$上的任一有界变差函数，成立着等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}a_0\int_a^b g(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_a^b \cos nx\, g(x)dx+b_n\int_a^b \sin nx\, g(x)dx\right].$$

【証明】 我們不妨假設$[a, b]$是$[0, 2\pi]$．写着

$$A_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx,\quad S_n(x)=S_n(g; x),$$

交換积分

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}A_n(t)\right)g(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(t)\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}f(x)dx\,dt$$

中的积分次序,我們得到

$$\frac{1}{2}a_0\int_0^{2\pi}g(t)dt+\sum_{n=1}^{N}\int_0^{2\pi}g(t)\,A_n(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\int_0^{2\pi}g(t)\,\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}\,dt\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}f(x)S_N(g; x)dx\to\int_0^{2\pi}f(x)g(x)dx,$$

后者由于$S_N(g; x)$是有界并且匀斂于$g(x)$．这就完成了引理2的証明．

【定理的証明】 我們只要对于偶函数$\varphi(t)\sim\sum a_n\cos nt$在条件$\varphi(t)\log|t|=o(1)$和$a_n=O(n^{-\delta})\,(\delta>0)$下,来导出

$$\int_0^{\pi}\varphi(t)\frac{\sin nt}{t}dt=o(1)$$

就好了．自然,我們可以假設$\int_0^{\pi}\varphi(t)dt=0$;从而$a_0=0$*)．当$\delta>1$时

*) 函数$g(t)-(1-\cos t)\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)dt$是滿足$\int_0^{\pi}g(t)dt=0$和$g(t)\log|t|=o(1)$的．

級数 $\sum a_n$ 絕对收斂. 因此, 我們只要在 $\delta\leqslant 1$ 的情况来研討. 写着

$$\eta=\frac{1}{2}\delta,$$

$$\int_0^\pi \varphi(t)\frac{\sin nt}{t}dt=\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{n^{-\eta}}+\int_{n^{-\eta}}^{\pi}=P+Q+R;$$

这里, 从 $\varphi(t)=o(1)$ 得到 $P=o(1)$;

$$|Q|\leqslant\max_{\frac{1}{n}<t<\frac{1}{n^\eta}}|\varphi(t)\log t|\cdot\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^\eta}}\frac{dt}{t|\log t|}=o(1)\log\frac{1}{\eta}=o(1).$$

对于 R, 利用引理 2:

$$R=\int_{\frac{1}{n^\eta}}^{\pi}\varphi(t)\frac{\sin nt}{t}dt=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\int_{\frac{1}{n^\eta}}^{\pi}\cos mt\frac{\sin nt}{t}dt$$

$$=a_n\int_{\frac{1}{n^\eta}}^{\pi}\frac{\cos nt\sin nt}{t}dt+\sum_{m\neq n}a_m\int_{\frac{1}{n^\eta}}^{\pi}\frac{\cos mt\sin nt}{t}dt,$$

第一項是

$$a_n\int\sin 2nt\frac{dt}{2t}=O(a_n)=O(n^{-\delta});$$

第二項是

$$O\Big(\sum_{m\neq n}\frac{m^{-\delta}n^\eta}{|m-n|}\Big),$$

其中的級数可以分成如下的四个部分:

$$\sum_{m=1}^{[\frac{1}{2}n]}+\sum_{m=[\frac{n}{2}]+1}^{n-1}+\sum_{m=n+1}^{2n}+\sum_{2n+1}^{\infty}$$

$$\leqslant\frac{2}{n}\sum_{m=1}^{n}m^{-\delta}+O\Big(n^{-\delta}\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{1}{k}\Big)+n^{-\delta}\sum_{n+1}^{2n}\frac{1}{m-n}+\sum_{m=2n+1}^{\infty}2m^{-1-\delta}$$

$$=O(n^{-\delta}\log n),$$

从而 $R=O(n^{\eta-\delta}\log n)=o(1)$, $P+Q+R=o(1)$. 証明完毕.

1935 年, 哈戴和立脫尔伍德在劍桥哲学会 (Cambr. Phil. Soc.) 的杂志上, 将上述定理中的条件 $a_n=O(n^{-\delta})$ 改进成

$$a_n>-An^{-\delta}\quad(\delta>0).$$

这样的定理，它的“假設部分”含有两个条件，一个是連續性条件，还有一个是系数条件，定理的終結是 $\mathfrak{S}[f;x]$ 的收斂. 我們称这种类型的定理是“討褒”式的定理，因为討褒 (O. Tauber) 証有如下的定理: $\sum a_n x^n \to s\,(x\to 1+0)$，$a_n n = o(1)$ 的話，$\sum a_n = s$. 最后，我們还要指出，定理中的系数条件不可以除去，就是說，只有定理中的一个連續条件不包含級数的收斂性.

实际上，哈戴和立脫尔伍德(1934, Pisa)証有如下的

定理 对于任一单調趋近于 0 的正数数列$\{\eta_n\}$，存在着函数 $\varphi(t)$，满足下面四个条件:

$\varphi(t)\sim\sum a_n\cos nt$，$\varphi(t)\log|t| = o(1)\ (t\to 0)$，$a_n = O(n^{-\eta_n})$，$\sum a_n$ 发散.

【証明】 首先証明: 当 $1<M\leqslant N$，$0<2t<1$ 时，有絕对常数 A 适合于

$$\left|\sum_{n=M}^{N}\frac{\sin nt}{n\log n}\right| < \frac{A}{-\log t}.$$

当 $N\leqslant\tau=\left[\frac{1}{t}\right]$ 时，上式左方小于

$$t\sum_{M}^{\tau}\frac{1}{\log n} < t\sum_{1<n<\sqrt{\tau}}\frac{1}{\log n} + \frac{2t\tau}{\log\tau} < \frac{A}{-\log t}.$$

假如 $N>\tau$，那末从 $\sum_{M}^{N} = \sum_{M}^{\tau} + \sum_{\tau+1}^{N}$，得到

$$\left|\sum_{n=M}^{N}\frac{\sin nt}{n\log n}\right| < \frac{A}{-\log t} + \frac{1}{\tau\log\tau}\max_{\nu>\tau}\left|\sum_{n=\tau+1}^{\nu}\sin nt\right|$$

$$< \frac{A}{-\log t} + \frac{1}{\tau\log\tau}\,\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} < \frac{A_1}{-\log t},$$

A_1 是絕对常数.

設 $\{m_r\}$ 和 $\{n_r\}$ 是两个单調增加的正整数列，

$$q_r = 2n_r > 2m_r, \quad n_r > 3n_{r-1}.$$

从而 $q_r - n_r > 3n_{r-1} = n_{r-1} + q_{r-1}$. 置

$$C_r(t) = 2\sin q_r t\cdot\sum_{m_r}^{n_r}\frac{\sin nt}{n\log n},$$

$$\varphi(t) = \sum\alpha_r C_r(t),$$

这里 $\alpha_r>0$, $\sum\alpha_r<\infty$. 由于

$$|\varphi(t)|<\left|\sum_{r=1}^{R}\alpha_r C_r(t)\right|+\frac{A}{|\log t|}\sum_{r=R+1}^{\infty}\alpha_r,$$

所以 $\varphi(t)\log t=o(1)$. 将 $\sum\alpha_r C_r(t)$ 中的 $C_r(t)$ 写成

$$\frac{\cos(q_r-n_r)t}{n_r\log n_r}+\cdots+\frac{\cos(q_r-m_r)t}{m_r\log m_r}$$

$$-\frac{\cos(q_r+m_r)t}{m_r\log m_r}-\cdots-\frac{\cos(q_r+n_r)t}{n_r\log n_r},$$

那末乘以 α_r 而相加,就得到 $\varphi(t)$ 的余弦展开 $\sum a_n\cos nt$ ——并无并项的事. 在 $t=0$, $C_r(0)$ 中,正数系数的一切項的和是

$$\frac{1}{n_r\log n_r}+\cdots+\frac{1}{m_r\log m_r}.$$

对于 α_r 和 m_r, 取 n_r 适合

$$\alpha_r\left[\log\frac{\log n_r}{\log m_r}\right]\to\infty$$

的話,那末 $\sum a_n$ 成一发散級数(无限振动的級数).

我們見到

$$\max_{q_r-n_r\leq n\leq q_r+n_r}|a_n|=\frac{1}{m_r\log m_r}.$$

因此,假如后者等于

$$O[(q_r+n_r)^{-\eta_{q_r}-n_r}]=O(n_r^{-\eta_{n_r}}),$$

那末 $a_n=O(n^{-\eta_n})$ 而定理成立.

总而言之,証明归結于同时建立下列几件事:

$$\alpha_r>0,\quad \sum\alpha_r<\infty,\quad n_r>3n_{r-1},\quad \alpha_r\log\frac{\log n_r}{\log m_r}\to\infty,$$

$$\frac{1}{m_r}=O(n_r^{-\eta_{n_r}}).$$

取定 α_{r-1}, m_{r-1}, n_{r-1} 之后,我們取 n_r 使得

$$\log\log\frac{1}{\eta_{n_r}}>r^2,\quad n_r>3n_{r-1}.$$

置 $\alpha_r=\dfrac{1}{\log\log\eta_{n_r}^{-1}}$, 那末 $\sum\alpha_r<\infty$. 取 $[n_r^{\eta_{n_r}}]$ 为 m_r, 那末

$$\alpha_r \log \frac{\log n_r}{\log m_r} = \frac{1}{\log\log \eta_{n_r}^{-1}} \log \frac{\log n_r}{\log [n_r^{\eta_{n_r}}]}$$
$$\geqslant \frac{1}{\log\log \eta_{n_r}^{-1}} \log \frac{1}{\eta_{n_r}} \to \infty,$$

并且

$$\frac{1}{m_r \log m_r} = O(n_r^{-\eta_{n_r}}) \frac{1}{\log m_r} = o(n_r^{-\eta_{n_r}}).$$

証明完毕.

12. 共軛級数的收斂問題

用 f 的性质如何給出 $\overline{\mathfrak{S}}[f; x]$ 的收斂条件，称为共軛級数的收斂問題．相当于狄尼，楊格以及若当的，前面已經說过．这些定理的形式是在适当条件下，成立着

$$\overline{S}_n(x) - \overline{f}\left(x, \frac{\pi}{n}\right) = o(1).$$

这个条件并不含有积分

$$\overline{f}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{2\tan\frac{t}{2}} dt$$

的存在，从而它并不含有 $\overline{\mathfrak{S}}[f; x]$ 的收斂；但是当这个积分存在时，上述条件含有 $\overline{\mathfrak{S}}[f; x] = \overline{f}(x)$.

設 $a > 0$，置

$$\overline{f}_n(x) \equiv \overline{f}_n(x, a) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi} \psi_x(t) \cot\frac{t}{2} dt,$$

$$d_n(x) \equiv d_n(x, a) = \overline{S}_n(x) - \overline{f}_n(x).$$

我們要研究极限 $\lim d_n(x)$ 何时存在的問題．在 $f(x)$ 的一个普通不連續点 x，我們已經知道，极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{S}_n(x)}{\log n} = -\frac{l}{\pi}$$

存在而不等于 0，积分 $\overline{f}(x)$ 也不存在；但是，极限 $\lim d_n(x)$ 可能存在．例如

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots = \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x \quad (-\pi < x < \pi)$$

的話，$-\bar{f}(x)\doteq\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x+\cdots$；在点 $x=0$，

$$\psi_x(t)=\frac{\pi}{2},$$

$$-\bar{S}_n(0)=\sum_{2\nu+1<n}\frac{1}{2\nu+1}=\frac{1}{2}\log n+\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\gamma+o(1),$$

γ 是欧拉常数：$\gamma=0.57721\cdots$；

$$\bar{f}_n(0)=-\frac{1}{4}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi}\cot\frac{t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\log\sin\frac{a}{2n};$$

从而

$$-d_n(0)\to\frac{1}{2}(\gamma+\log a).$$

另一方面，从

$$\bar{S}_n(0)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi_x(t)(1-\cos nt)}{2\tan\frac{t}{2}}dt+o(1)\quad(x=0)$$

得到

$$\frac{1}{2}\log 2n+\frac{1}{2}\gamma=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos nt}{2\tan\frac{t}{2}}dt+o(1).$$

一般地說，設 $f(x+0)-f(x-0)=d$，則从上式得到

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi_x(t)-d}{2\tan\frac{t}{2}}(1-\cos nt)\,dt=\bar{S}_n(x)+\frac{2d}{\pi}\left(\frac{1}{2}\log 2n+\frac{1}{2}\gamma\right)+o(1).$$

两边加上 $-f_n(x,a)$，我們見到

$$\begin{aligned}
&d_n(x)+\frac{d}{\pi}(\log 2n+\gamma)\\
&\quad=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi}\frac{\psi_x(t)}{2\tan\frac{t}{2}}dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(\psi_x(t)-d)(1-\cos nt)}{2\tan\frac{t}{2}}dt+o(1)\\
&\quad=\frac{d}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi}\frac{dt}{2\tan\frac{t}{2}}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{a}{n}}\frac{(\psi_x(t)-d)(1-\cos nt)}{2\tan\frac{t}{2}}dt\\
&\qquad+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi}\frac{(\psi_x(t)-d)\cos nt}{2\tan\frac{t}{2}}dt+o(1).
\end{aligned}$$

右端第一項等于

$$-\frac{d}{\pi}\log\frac{a}{2n}=\frac{d}{\pi}(-\log a+\log 2n),$$

从而

$$d_n(x)=-\frac{1}{\pi}(\log a+\gamma)d-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{a}{n}}\frac{(\psi_x(t)-d)(1-\cos nt)}{2\tan\frac{t}{2}}dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi}\frac{\psi_x(t)-d}{2\tan\frac{t}{2}}\cos nt\,dt+o(1).$$

上式中最后的积分的上限 π，不妨写成 $\delta(0<\delta<\pi)$，从而得到如下的

定理 1 写着 $d_n(x)=\tilde{S}_n(x)-\tilde{f}_n(x,a)$，当 $d=\lim\limits_{t\to 0}\psi_x(t)$ 存在时，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}d_n(x)$ 的存在，只取决于 f 在 x 附近的函数值．等式

$$\lim_{n\to\infty}d_n(x)=-d\,\frac{\log a+\gamma}{\pi} \tag{1}$$

成立的充要条件是

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{a}{n}}\frac{(\psi_x(t)-d)(1-\cos nt)}{2\tan\frac{t}{2}}dt+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\delta}\frac{\psi_x(t)-d}{2\tan\frac{t}{2}}\cos nt\,dt \tag{2}$$

$$=o(1),$$

这里的 δ 是 $(0,\pi)$ 中任一数．

系 1 当

$$\frac{1}{t}\int_0^t\psi_x(t)\,dt=d+o(1)\quad(t\to 0)$$

时，等式 (1) 成立的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi}\frac{\psi_x(t)-d}{t}\cos nt\,dt=0.$$

事实上，(2) 中第一項等于

$$\left[-\frac{1-\cos nt}{2\pi\tan\frac{t}{2}}\int_0^t(\psi_x(u)-d)du\right]_0^{\frac{a}{n}}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{a}{n}}\frac{d}{dt}\frac{1-\cos nt}{2\tan\frac{t}{2}}\int_0^t[\psi_x(u)-d]du\,dt$$

$$=o(1)+\int_0^{\frac{a}{n}}o(n)dt=o(1).$$

系 2 或是 $\frac{\psi_x(t)-d}{t}\in L(0,\pi)$，或是 f 在 x 的近旁为有界变差，(1)必成立；在这个情况下，加上 $f(x+0)=f(x-0)$，那末

$$\bar{S}_n(x)-\tilde{f}_n(x)\to 0.$$

事实上，f 在 x 的近旁为有界变差时，极限 $\psi_x(+0)=d$ 存在，从而 $\frac{1}{t}\int_0^t\psi_x(u)du=d+o(1)$；由系 1，(1)当下面的积分为 $o(1)$ 时成立：

$$\int_{\frac{a}{n}}^{\pi}\frac{\psi_x(t)-d}{t}\cos nt\,dt=\int_{\frac{a}{n}}^{\eta}\frac{\psi_x(t)-d}{t}\cos nt\,dt+o(1).$$

最后的积分——η 是一个适当小的正数——等于

$$\left[\frac{\sin nt}{n}\frac{\psi_x(t)-d}{t}\right]_{\frac{a}{n}}^{\eta}-\frac{1}{n}\int_{\frac{a}{n}}^{\eta}\frac{\sin nt}{t}d\psi_x(t)$$

$$+\frac{1}{n}\int_{\frac{a}{n}}^{\eta}\frac{\sin nt}{t^2}[\psi_x(t)-d]dt$$

$$=o(1)+O\left(\int_{\frac{a}{n}}^{\eta}|d\psi_x(t)|\right)+\frac{1}{n}\int_{\frac{a}{n}}^{\eta'}[\psi_x(t)-d]\frac{\sin nt}{t}dt,$$

这里 $\frac{a}{n}<\eta'<\eta$. 末項，由若当的定理，等于 $o(1)$；預先取 η 很小，可使 $\psi_x(t)$ 在 $(0,\eta)$ 上的全变差小于 ε. 因此三項的和小于 $\varepsilon+o(1)$. ε 是可以很小的，从而系 1 中的条件成立；(1)也成立.

当 $(\psi_x(t)-d)t^{-1}\in L(0,\pi)$ 时，系 1 中条件显然成立，从而(1)成立.

假如 x 是 f 的一个連續点，那末 $d=0$；(1)变成 $d_n(x)=o(1)$. 效法勒貝格定理的証明，我們可以建立

定理 2 两个条件

$$\Psi(t)=\int_0^t|\psi_x(u)|du=o(t)$$

和

$$\int_\eta^\pi\frac{|\psi_x(t+\eta)-\psi_x(t)|dt}{t}=o(1)\quad(\eta\to 0)$$

含有 $\bar{S}_n(x)-\bar{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right)=o(1)$.

我們还应該留意：当 $\Psi(t)=o(t)$ 和 $\bar{S}_n(x)-\bar{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right)=o(1)$ 成立时，$\bar{\mathfrak{S}}[f;x]$ 收斂的充要条件是 $\bar{f}(x)$ 存在. 事实上，如 $h\in\left(\frac{\pi}{n+1},\frac{\pi}{n}\right)$ 的話，

$$\left|\bar{f}(x,h)-\bar{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{h\pi}\Psi\left(\frac{\pi}{n}\right)=o(1).$$

从而，当 $n\to\infty$ 时，

$$\bar{S}_n(x)-\bar{f}(x)=\left[\bar{S}_n(x)-\bar{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right)\right]+\left[\bar{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right)-\bar{f}(x,h)\right]$$
$$+[\bar{f}(x,h)-\bar{f}(x)]$$

趋近于 0.

从 §8 的議論，我們断言：定理 2 中的两个条件等价于下面一个条件：

$$\lim_{\eta\to 0}\int_\eta^\pi\left|\frac{\psi_x(t+\eta)}{t+\eta}-\frac{\psi_x(t)}{t}\right|dt=0.$$

另一方面，密斯拉(M. L. Misra, 1935)証明：$\bar{f}(x)$存在的話，上面的极限等式含有 $\bar{S}_n(x)\to\bar{f}(x)$（倫敦数学会期刊 J. L. M. S. 第十卷）. 但是定理 2 中的两个条件包含等式

$$\bar{S}_n(x)-\bar{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right)=o(1)$$

的事实，齐革蒙特 (Zygmund) 的«三角級数論»中已經提及，因此密斯拉的結果，并不是完全独創的. 平行于日尔斤的定理，我們可証如下的

定理 3 两个条件

$$\tau(t)=\int_0^t \psi_x(u)\,du=o(t)$$

和

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{\eta\to+0}\int_{k\eta}^{\pi}\frac{|\psi_x(t+\eta)-\psi_x(t)|}{t}\,dt=0$$

含有 $\bar{S}_n(x)-\bar{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right)=o(1)$. 此时，$\mathfrak{S}(f;x)$收斂的充要条件是$\bar{f}(x)$的存在.

【証明】 由定理1，我們要从所設两个条件导出

$$-\int_0^{\frac{\pi}{n}}\psi_x(t)\cot\frac{t}{2}\cdot(1-\cos nt)\,dt+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\psi_x(t)\cot\frac{t}{2}\cdot\cos nt\,dt=o(1).$$

第一項，由于$\tau(t)=o(t)$，是$o(1)$；这个証明，前面已經做过. 因此，我們只要証明第二項是$o(1)$. 首先証明

$$J(k)=\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}\psi_x(t)\cot\frac{t}{2}\cdot\cos nt\,dt=o(1).$$

这个积分等于

$$\left[\tau(t)\cot\frac{t}{2}\cdot\cos nt\right]_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}\tau(t)\left\{n\sin nt\cot\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\cos nt\operatorname{cosec}^2\frac{t}{2}\right\}dt$$

$$=o(1)+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}\left\{o(n)+o\left(\frac{1}{t}\right)\right\}dt.$$

从而$J(k)=o(1)$. 由于

$$4\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\psi_x(t)\cot\frac{t}{2}\cos nt\,dt$$

$$=J(k)+\left\{\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\pi}+2\int_{\frac{(k+1)\pi}{n}}^{\pi+\frac{\pi}{n}}+\int_{\frac{(k+2)\pi}{n}}^{\pi+\frac{2\pi}{n}}\right\}\psi_x(t)\cot\frac{t}{2}\cos nt\,dt$$

$$=o(1)+\left\{\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\pi}+2\int_{\frac{(k+1)\pi}{n}}^{\pi+\frac{\pi}{n}}+\int_{\frac{(k+2)\pi}{n}}^{\pi+\frac{2\pi}{n}}\right\}\psi_x(t)\cos nt\frac{2dt}{t},$$

这是$o(1)$（参見日尔斤定理的証明），所以定理証明完畢.

第 二 章

富理埃級数的和

1. 富理埃級数的和

f 的富理埃級数 $\mathfrak{S}[f]$，甚至于在 f 的連續点，也有发散的情况，这是前章已經説过的．另一方面，求級数的"和"，并不限于"收斂法"，收斂法就是用部分和 S_n 的极限 $\lim S_n$ 来求和．事实上，設 $S_n(x)$ 是 $\mathfrak{S}[f;x]$ 的部分和，当 x 为 f 的連續点时，等式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}=f(x) \tag{1}$$

成立．这是匈牙利的費耶 (Fejér) 于 1904 年証明的．后来，勒貝格指出，在 f 的不連續点 x，(1) 也有可能成立；他証明当 $f(x)\in L(0, 2\pi)$ 时，(1) 几乎处处成立．由是从 $\mathfrak{S}[f]$，通过算术平均法，除开 x 的一个零集，可以得到 $f(x)$．

除开上述的算术平均法外，还有其他种种的求和法．

設

$$T=((a_{mn}))\quad (m=0, 1, \cdots; n=0, 1, \cdots)$$

是一个无限行列，对于数列 S_0, S_1, $\cdots$ 或級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$，$S_n=\sum\limits_{\nu=0}^{n}u_\nu$，作級数

$$\tau_m=\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}S_n\quad (m=0, 1, 2, \cdots).$$

假如一切数 τ_m 都收斂，并且数列 $\{\tau_m\}$ 具有极限

$$\lim_{m\to\infty}\tau_m=S,$$

那末我們說：数列 $\{S_n\}$ 或級数 $\sum u_n$ 可用 **T 求和法**求出它的（值）和，（值）和是 S. 簡写这个事实为

(2) $$T-\lim_{n\to\infty}S_n=S,\ \text{或是}\ \sum u_n=S\,(T).$$

当 $a_{mm}=1$, $a_{mn}=0\,(m\neq n)$ 时，T 求和法就是收斂法；对于算术平均法，我們見到

$$a_{mn}=\frac{1}{m+1}\quad (n=0,\ 1,\ \cdots);\quad a_{mn}=0\quad (n>m).$$

当 $S_n\to S$ 或 $\sum u_n=S$ 时，(2) 常成立，那末我們称这种 T 求和法是**正則的求和法**，T 是一个正則行列. 透普利茨(Toeplitz)于 1911 年証得如下的

定理 1 行列 $T=((a_{mn}))$ 具有正則性的充要条件是

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_{mn}|\leqslant K$ （K 无关于 m），

(ii) $\lim\limits_{m\to\infty}a_{mn}=0$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，

(iii) $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{mn}=1.$

【証明】 充分性的証明．置 $S_n-S=\varepsilon_n$，那末由于 $\varepsilon_n\to 0$，从 (iii) 和 (i) 得到

$$|\tau_m-S|\leqslant\left|\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n a_{mn}\right|+\left|S\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}-1\right)\right|$$
$$\leqslant\left|\sum_{n=0}^{N}\varepsilon_n a_{mn}\right|+K\max_{n>N}|\varepsilon_n|+o(1).$$

利用 (ii)，我們見到

$$\limsup_{m\to\infty}|\tau_m-S|\leqslant K\max_{n>N}|\varepsilon_n|.$$

左端与 N 无关，它必須等于 0，从而 $\tau_m\to S$.

三个条件 (i)，(ii)，(iii) 的必要性．固定 k，作如下的 $\{S_n\}$：

$$S_k=1,\quad S_n=0\quad (n\neq k).$$

从 $S_n\to 0$ 得到 $\tau_m\to 0$. 由于 $\tau_m=a_{mk}$，所以 (ii) 是必要的.

其次取 $S_n=1(n=0, 1, 2, \cdots)$，那末 $\tau_m=\sum a_{mn}\to 1$. 所以 (iii) 是必要的.

最后証明 (i) 的必要性. 首先証明一切級数 $\sum_n |a_{mn}|$ 都是收斂的. 假如不然，有一个 m 使 $\sum_n |a_{mn}|=\infty$，那末

$$\varepsilon_n=\left[\sum_{\nu=0}^{n}|a_{m\nu}|\right]^{-\frac{1}{2}}$$

的話，由于 $\sum_{\nu=0}^{n}|a_{m\nu}|\varepsilon_\nu>\varepsilon_n\sum_{\nu=0}^{n}|a_{m\nu}|=\varepsilon_n^{-1}\to\infty$，所以級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_{mn}|\varepsilon_n$$

仍然发散. 現在采取如下的 $\{S_n\}$: $S_n=\varepsilon_n\operatorname{sgn}a_{mn}$，那末

$$\tau_m=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n|a_{mn}|=\infty.$$

这是不合理的. 因此，$\sum|a_{mn}|<\infty(m=0, 1, \cdots)$.

現在假定 (i) 不成立，那末我們可以逐步定义自然数 $n_1, n_2, \cdots$; $m_1, m_2, \cdots$ 于下. 当 $n_1, m_1, n_2, m_2, \cdots, m_{r-1}, n_r$ 已定时，我們取 $m_r>m_{r-1}$ 使

$$\sum_{n=0}^{n_r-1}|a_{m_rn}|<1, \quad \sum_{n=0}^{\infty}|a_{m_rn}|>r^2+2.$$

然后取 $n_{r+1}>n_r$ 使 $\sum_{n=n_{r+1}}^{\infty}|a_{m_rn}|<1$，从而

$$\sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1}|a_{m_rn}|>r^2.$$

对于下面的收斂数列 $\{S_n\}$ $(S_n\to 0)$:

$$S_n=0 \quad (n<n_1), \quad S_n=\frac{1}{r}\operatorname{sgn}a_{m_rn} \quad (n_r\leqslant n<n_{r+1}),$$

我們見到

$$\tau_{m_r}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{m_rn}S_n>\frac{1}{r}\sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1}|a_{m_rn}|-2>r-2\to+\infty.$$

这与假設 "$S_n\to 0$ 含有 $\tau_m\to 0$" 不相容. 証明完毕.

我們应該留意：当 $S_n=S_n(\alpha)$ 时，那末，如 $S_n(\alpha)$ 匀斂于 $S(\alpha)$ 的話，$\tau_m(\alpha)$ 也匀斂于 $\tau(\alpha)$. 在 $S=0$ 的情况，(iii) 可以从略.

系 1 假如正則行列 $T=((a_{mn}))$ 的元素 a_{mn} 都不是負的 $(a_{mn}\geqslant 0)$，那末 $\tau_m=\sum a_{mn}S_n$ 滿足

$$\underline{\lim}\, S_n\leqslant \underline{\lim}\, \tau_m\leqslant \overline{\lim}\, \tau_m\leqslant \overline{\lim}\, S_n. \tag{3}$$

【証明】 記 (3) 的最右端为 S. 当 S 是一个有限数时，那末对于 $\varepsilon>0$，有如下的 n_0:

$$S_n<S+\varepsilon \quad (n>n_0).$$

因此，$\tau_m\leqslant a_{m0}S_0+a_{m1}S_1+\cdots+a_{mn_0}S_{n_0}+S+\varepsilon$. 从而

$$\overline{\lim}\, \tau_m\leqslant S+\varepsilon, \quad \overline{\lim}\, \tau_m\leqslant S.$$

当 S 是 $+\infty$ 时，当然 $\overline{\lim}\, \tau_m\leqslant+\infty$. 又若 $S=-\infty$，显然地 $\overline{\lim}\, \tau_m=-\infty$. 同样，可証

$$\underline{\lim}\, \tau_m\geqslant \underline{\lim}\, S_n.$$

証明完毕.

系 1 是下述命題的特殊情况.

系 2 設 $C=\lim\limits_m\sup\sum\limits_n|a_{mn}|$，$\tau_m=\sum\limits_n a_{mn}S_n$，則当

$$\bar{S}=\lim_n\sup S_n, \quad \underline{S}=\lim_n\inf S_n$$

时，成立着

$$\frac{\bar{S}+\underline{S}}{2}-C\frac{\bar{S}-\underline{S}}{2}\leqslant\lim_m\inf\tau_m\leqslant\lim_m\sup\tau_m\leqslant\frac{\bar{S}+\underline{S}}{2}+C\frac{\bar{S}-\underline{S}}{2}.$$

【証明】 写着 $S_n=\frac{1}{2}(\bar{S}+\underline{S})+t_n$，那末，由于

$$\lim_{n\to\infty}\sup|t_n|=\frac{\bar{S}+\underline{S}}{2}-\underline{S}=\frac{\bar{S}-\underline{S}}{2},$$

所以从 $\tau_m=\frac{1}{2}(\bar{S}+\underline{S})\sum\limits_n a_{mn}+\sum\limits_n a_{mn}t_n$，得到

$$\lim\sup\tau_m\leqslant\frac{\bar{S}+\underline{S}}{2}+\frac{\bar{S}-\underline{S}}{2}\lim_m\sup\sum_n|a_{mn}|=\frac{\bar{S}+\underline{S}}{2}+C\frac{\bar{S}-\underline{S}}{2}.$$

改变第二項的符号，就得到所余的一个不等式. 証明完毕.

特殊情况 設 $q_n>0$，$Q_n=q_0+q_1+\cdots+q_n$，那末当 $Q_n\to\infty$ 时，

$$\left\{\frac{q_0}{Q_n}, \frac{q_1}{Q_n}, \cdots, \frac{q_n}{Q_n}\right\}_{n=0,1,\cdots}$$

成一正則行列．因此，当 $S_n=p_n/q_n\to S$ 时，

$$\frac{p_0+p_1+\cdots+p_n}{q_0+q_1+\cdots+q_n}=\frac{q_0}{Q_n}S_0+\cdots+\frac{q_n}{Q_n}S_n\to S.$$

这是斯多耳次(Stolz)的定理．特别当 $q_n=1$ 时，我們得到如下的定理：$S_n\to S$ 含有

$$\frac{S_0+S_1+\cdots+S_n}{n+1}\to S.$$

通常叫它做柯西的定理．現在写着

$$S_n^0=S_n,\quad S_n^1=S_0^0+S_1^0+\cdots+S_n^0,\quad\cdots,\quad S_n^k=S_0^{k-1}+\cdots+S_n^{k-1};$$

$$A_n^0=1,\quad A_n^1=A_0^0+\cdots+A_n^0,\quad\cdots,\quad A_n^k=A_0^{k-1}+\cdots+A_n^{k-1}.$$

那末当 $\dfrac{S_n^k}{A_n^k}\to S\ (n\to\infty)$ 时，$\dfrac{S_n^{k+1}}{A_n^{k+1}}\to S$．但是，这个命題是倒不过来的——后者不包含前者．对于某一 k，假如

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^k}{A_n^k}=S,$$

那末我們說：数列 $\{S_n\}$ 可用 $(C,\,k)$ **平均法求和**，和是 S．对于不是正整数 k 的 $(C,\,k)$ 求和法，将詳述于后．由斯多耳次定理，$(C,\,k)$ (k: 自然数) 求和法是具有正則性的．

数列 $\{S_n\}$ 的变換式 $\sum a_{mn}S_n$ 含有 m，m 是参数，可以不限于正整数．例如 $r=\dfrac{1}{m}+a$ 的話，当 $m\to\infty$ 时，$r\to a$；而定理 1 在这个情况也成立．比方說，

$$a_n(r)=(1-r)r^n\quad(0<r<1),$$

那末 $\sum a_n(r)=1$，当 $r\to1-0$ 时，$a_n(r)\to0$．写着 $S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$，那末

$$\tau(r)=(1-r)\sum_{n=0}^{\infty}S_nr^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n.$$

当 $S_n\to S$ 时，$\tau(r)\to S\,(r\to1-0)$．后者不含有前者，因此假如 $\sum a_n$ 或 $\{S_n\}$ 能适合 $\tau(r)\to S\,(r\to1-0)$，我們說，級数 $\sum a_n$ 或是数列 $\{S_n\}$ 可用**阿培耳 (Abel) 求和法**求和，和是 S．阿培耳求和法，一名**普阿松 (Poisson) 求和法**．当 $\tau(r)\to S$ 时，我們写着 $\sum a_n=S\,(A)$ 或是

$$A-\lim S_n=S.$$

定理 2 假如 $\sum a_n=S(C,k)$ (k: 自然数), 那末 $\sum a_n=S(A)$.

【証明】 从 $\tau(r)=\sum a_n r^n=(1-r)\sum S_n^0 r^n$, 得到

$$\tau(r)=(1-r)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} S_n^k r^n.$$

因此当 $S_n^k/A_n^k=S+o(1)$ 时, 从上式得到

$$\tau(r)=(1-r)^{k+1}S\sum_{n=0}^{\infty} A_n^k r^n+o\left((1-r)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n^k r^n\right)=S+o(1).$$

实际上, 当 $n>n_0$ 时, $S_n^k/A_n^k=S+\varepsilon_n$, $|\varepsilon_n|<\varepsilon$, $S=0$ 的話, $\tau(r)$ 等于

$$(1-r)^{k+1}\sum_{n=0}^{n_0} S_n^k r^n \varepsilon_n+O(\varepsilon).$$

当 $r\to 1-0$ 时, 此式是 $O(\varepsilon)$. 由于 ε 可以很小, 所以当 $r\to 1-0$ 时, 这是 $o(1)$. 証明完毕.

例 設 $0<\theta<\pi$, 証明

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots=o(A),$$

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots=\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}(A).$$

事实上,

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\frac{\sin(2m+1)\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin\,(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right]^2.$$

由是可知 $\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots=o(C,1)$, 从而得到第一式. 第一式也可以直接从

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n\theta=\frac{1}{2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

得到. 又因

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\sin\nu\theta=\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}-\frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1+n}{2}\cot\frac{\theta}{2}-\frac{\sin(n+1)\theta}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2},$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\theta=\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}(C,1)$. 直接从

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n\theta=\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2},$$

得到 $\sum\sin n\theta=\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}(A)$.

定理 3 固定一点 x, 富理埃級数 $\mathfrak{S}[f;x]$ 可用正則的 $T=((a_{mn}))$ 求和法求和是 f 在 x 的一个局部性. 这就是說, 当 $0<\delta<\pi$ 时,

$$\tau_m(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\varphi_x(t)K_m(t)\,dt+o(1),$$

这里

$$K_m(t)=\sum_n a_{mn}D_n(t),\ D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},\ \tau_m(f;x)=\sum a_{mn}S_n(x),$$

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)\,dt,\ \varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t).$$

【証明】 对于 $\varepsilon>0$, 存在 n_0, 当 $n>n_0$ 时,

$$\left|\int_{\delta}^{\pi}\varphi_x(t)D_n(t)\,dt\right|<\varepsilon.$$

由于 $\sum_n|a_{mn}|\leqslant K$, 所以

$$\left|\int_{\delta}^{\pi}\varphi_x(t)K_m(t)\,dt\right|=\left|\sum_n a_{mn}\int_{\delta}^{\pi}\varphi_x(t)\,D_n(t)\,dt\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{n=0}^{n_0}a_{mn}\int_{\delta}^{\pi}\varphi_x(t)\,D_n(t)\,dt\right|+\varepsilon K.$$

令 $m\to\infty$, 再令 $\varepsilon\to0$, 就得到

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\delta}^{\pi}\varphi_x(t)K_m(t)\,dt=0.$$

証明完毕.

2. 富理埃級数可用正則 T 求和法求和的情况

定理 1 設 $((a_{mn}))$ 是具有正則性的 T 行列并且

$$\int_{\delta}^{\pi} |K_m(t)|dt = O(1),$$

則当 $f(x+0)$ 和 $f(x-0)$ 都存在时，成立着

$$\lim_{m\to\infty} \tau_m(x) = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

假如 $h_m \to 0$, 那末, $d=f(x+0)-f(x-0)$ 的話,

$$\tau_m(x+h_m) = \frac{d}{\pi}\int_0^{h_m} K_m(t)dt + \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} + o(1).$$

【証明】 由于 $\frac{1}{\pi}\int K_m(t)dt \to 1$, 所以我們不妨假設 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = f(x)$. 又因 $K_m(t) = \sum a_{mn}D_n(t)$, 我們得到

$$\tau_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_m(t)dt.$$

从而 $\tau_m(x) = \max\limits_{0<t<\eta} |\varphi_x(t)| O(1) + o(1) = o(1)$, 这里

$$2\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x),$$

这就建立了第一个結果.

要証第二个結果，首先假設 $d=0$. 記

$$\phi_x(t) = \frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\}.$$

由于 $\quad \phi_{x+h_m}(t) - \phi_x(0)$

$$= \frac{1}{2}\{[f(x+h_m+t)-f(x)] + [f(x+h_m-t)-f(x)]\},$$

所以当 $\delta(\varepsilon)$ 很小，$\mu(\varepsilon)$ 足够大时，可使 $|\phi_{x+h_m}(t) - \phi_x(0)| < \varepsilon$. 从而 $\tau_m(x+h_m) - \phi_x(0)$ 等于

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} [\phi_{x+h_m}(t) - f(x)]K_m(t)dt + \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \phi_{x+h_m}(t)K_m(t)dt$$
$$- \frac{2f(x)}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} K_m(t)dt + o(1).$$

第一項的絕对值小于

$$\varepsilon \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} |K_m(t)|dt=\varepsilon O(1),$$

其余各项的和是 $o(1)$. 从而，当 $d=0$ 时，成立着

$$\tau_m(x+h_m)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}+o(1).$$

当 $d\neq 0$ 时，我們取輔助函数 $g(y)=f(y)-\frac{d}{\pi}k(y-x)$，这里

$$k(y)=\frac{\pi-y}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin ny}{n} \quad (0<y<2\pi), \quad k(0)=0.$$

由于 $g(x\pm 0)=f(x\pm 0)\mp\frac{d}{\pi}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, $g(x)=f(x)$，所以 $y=x$ 是 $g(y)$ 的一个連續点. 从而

$$\tau_m(x+h_m;g)\to g(x)=f(x).$$

当 $h_m>0$ 时，$\tau_m(x+h_m;\ k(y-x))$ 等于

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[k(h_m+t)+k(h_m-t)]K_m(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{h_m}\left[\frac{\pi-h_m-t}{2}+\frac{\pi-h_m+t}{2}\right]K_m(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{h_m}^{\pi}\left[\frac{\pi-h_m-t}{2}-\frac{\pi+h_m-t}{2}\right]K_m(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{h_m}(\pi-h_m)\,K_m(t)\,dt-\frac{h_m}{\pi}\int_{h_m}^{\pi}K_m(t)dt=\int_0^{h_m}K_m(t)dt+o(1).$$

从 $\tau_m(x+h_m;\ g)\to f(x)$ 和 $\tau_m(x+h_m;\ k(y-x))\to\int_0^{h_m}K_m(t)dt$，就得到

$$\tau_m(x+h_m;\ f)=f(x)+\frac{d}{\pi}\int_0^{h_m}K_m(t)dt+o(1).$$

对于 $h_m<0$，可以施行同样手續而导出上式. 定理証毕.

系 1 $\tau_m(x;f)$ 在閉区間 $[a,\ b]$ 上匀斂于 $f(x)$，如果 $f(x)$ 在包含 $[a,\ b]$ 的一个开区間上具有連續性的話. 假如 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上为有界，那末 $\tau_m(x;f)$ 在 $[a,\ b]$ 上均匀地有界.

系 2 对于 L 可积函数 $f(x)$，成立着如下的关系式:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\tau_m(x)|\,dx\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_m(t)|\,dt\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\tau_m(x)-f(x)|\,dx=o(1)\quad(m\to\infty).$$

【証明】 系1从定理的証明容易明白. 系2的第一个关系,可于 $|\tau_m(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int|f(x+t)K_m(t)|\,dt$ 施行积分 $\int\cdots dx$ 而得.

要建立系2的第二式,对于 $\varepsilon>0$ 和适当大的常数 H,存在連續函数 $c(x)$ 适合

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-c(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{H},\ c(x+2\pi)\equiv c(x).$$

于不等式

$$|\tau_m(x;f)-\tau_m(x;c)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-c(x+t)|\cdot|K_m(t)|\,dt,$$

关于 x 施行积分,就得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\tau_m(x;f)-\tau_m(x;c)|\,dx<\varepsilon.$$

由是易知

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\tau_m(x;f)-f(x)|\,dx<\int_{-\pi}^{\pi}|\tau_m(x;c)-c(x)|\,dx+2\varepsilon.$$

右端第一項,由系1,是 $o(1)$. 所以左端是 $o(1)$. 証明完毕.

T 求和法中的积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_m(t)|\,dt$$

相当于直交函数級数中的勒貝格常数,它的有界性是連續函数的富理埃級数可用相应的 T 法求和的充要条件. 事实上,当这个积分叙列非有界时,我們可用第一章中有关无界勒貝格常数的方法,作出連續函数 f,使 $\mathfrak{S}[f]$ 不能到处可用相应的 T 法求和. 当 $K_m(t)$ 成一正値函数时,上面的积分等于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_m(t)\,dt,$$

是有界的,并且成立着

$$\liminf_{t\to 0}\phi_x(t)\leqslant\liminf_{m\to\infty}\tau_m(x)\leqslant\limsup_{m\to\infty}\tau_m(x)\leqslant\limsup_{t\to 0}\phi_x(t).$$

$(C, 1)$ 求和法以及阿培耳求和法都是这个情况的特殊例子.

在定理 1 中,假如把条件 $\int|K_m|dt=O(1)$ 加强,那末关于 $f(x\pm 0)$ 的存在条件可以削弱:

定理 2　假如正则行列 $T=((a_{mn}))$ 适合 $\sum n|a_{mn}|<\infty$ $(m=0,1,\cdots)$ 和

$$\int_0^\pi t\,|K'_m(t)|\,dt=O(1)\quad (K_m(t)=\sum a_{mn}D_n(t)),$$

那末当 $\int_0^t \varphi_x(u)\,du=o(t)$ $(t\to 0,\ 2\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x))$ 时,

$$\tau_m(x)=\sum_n a_{mn}S_n(x)\to f(x).$$

【証明】　由于 $\sum n\,|a_{mn}|<\infty$, 所以 $K'(t)=\sum a_{mn}D'_n(t)$ 在 $0<t\leqslant\pi$ 中是連續的. 对于 $\varepsilon>0$, 存在着 δ 使当 $0<t<\delta$ 时,积分

$$\varphi_1(t)=\int_0^t \varphi_x(u)\,du$$

的絕对值小于 εt. 从而

$$\int_0^\delta \varphi_x(t)K_m(t)dt=\Big[\varphi_1(t)K_m(t)\Big]_0^\delta-\int_0^\delta \varphi_1(t)K'_m(t)dt$$

的絕对值小于 $\varepsilon\delta\dfrac{1}{2}\operatorname{cosec}\dfrac{\delta}{2}\sum|a_{mn}|+\varepsilon O(1)=\varepsilon O(1)$. 由 §2 的定理 3, $\tau_m(x)\to f(x)$. 証明完毕.

系　$\varphi_1(t)=o(t)$ 含有 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\,(A)$.

【証明】　設 $f(\theta)\sim\sum A_n(\theta)$, 則 $\sum_0^\infty A_n(x)r^n$ 等于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi\left[\frac{1}{2}+r\cos(t-x)+\cdots\right]f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi P(r,\,t-x)f(t)\,dt,$$

这里

$$P(r,\,t)=P(t)=\frac{1}{2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\geqslant 0,\quad \frac{\partial P}{\partial t}\leqslant 0\quad (0\leqslant t\leqslant\pi).$$

因此

$$\int_0^\pi t\,|P'(r,\,t)|\,dt=-\int_0^\pi tP'(r,\,t)\,dt=\int_0^\pi P(t)\,dt-\pi P(\pi)\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

由是，从定理 2 得到 $\mathfrak{S}[f; x]=f(x)(A)$.

应該留意：$(C, 1)$ 求和法中的核

$$F_m(t)=\frac{1}{2m+2}\left(\frac{\sin (m+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\right)^2$$

不滿足 $\int_0^\pi t|F'_m(t)|dt=O(1)$. 因此，从 $\varphi_1(t)=o(t)$ 不能断言

$$\mathfrak{S}[f; x]=f(x)(C, 1).$$

对于这个結果，下面的定理給出一个充分条件——較强于費耶的条件.

定理 3 設正則求和法 $T=((a_{mn}))$ 滿足条件 $\sum_n n|a_{mn}|<\infty$; 核

$$K_m(t)=\sum_n a_{mn}D_n(t)$$

滿足条件 $|K_m(t)|\leqslant K^*_m(t)$, $K^*_m(t)$ 是 $0<t\leqslant\pi$ 上的全連續函数，它滿足

$$tK^*_m(t)\leqslant H_1 (0<t\leqslant\pi), \quad \int_0^\pi t|K^{*\prime}_m(t)|dt\leqslant H_2.$$

在这些情况下，$\int_0^t |\varphi_x(u)|du=o(t)$ 含有 $\tau_m(x)\to f(x)$; 这里

$$\varphi_x(u)=\frac{1}{2}\{f(x+u)+f(x-u)-2f(x)\}.$$

【証明】 对于 ε，存在着 δ，使 $0\leqslant t\leqslant\delta$ 时，

$$\Phi(t)\equiv\int_0^t |\varphi_x(u)|du\leqslant\varepsilon t.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^\delta |\varphi_x(t)K_m(t)|dt&\leqslant\int_0^\delta |\varphi_x(t)|K^*_m(t)dt\\&\leqslant\Phi(\delta)K^*_m(\delta)-\int_0^\delta \Phi(t)K^{*\prime}_m(t)dt\\&\leqslant\varepsilon H_1+\varepsilon\int_0^\delta t|K^{*\prime}_m(t)|dt\leqslant\varepsilon(H_1+H_2).\end{aligned}$$

因此 $\int_0^\delta \varphi_x(t)K_m(t)dt=o(1)$, $\tau_m(x)\to f(x)$. 証明完毕.

系 1 当 $\int_0^t |\varphi_x(u)|du=o(t)$ 时，$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\ (C,1)$. 假如 $f(x)$ 在某一开区間中是連續的，那末在此开区間中的任一閉区間上，$\sigma_n(f;x)$ 匀斂于 $f(x)$，σ_n 是 $\{S_n\}$ 的算术平均；

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\sigma_n(x)-f(x)|dx\to 0.$$

【証明】 事实上，$F_m(t)$ 适合

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_m(t)dt=1,\qquad F_m(t)=\begin{cases}O\left(\frac{1}{mt^2}\right)\\ O(m)\end{cases}\qquad (0<t\leqslant\pi).$$

因此，取相当大的 H，置 $F_m^*(t)=\frac{2Hm}{1+m^2t^2}$；我們見到

$$0\leqslant F_m(t)\leqslant F_m^*(t),\ tF_m^*(t)\leqslant H,\ F_m^{*\prime}(t)=-\frac{4m^3tH}{(1+m^2t^2)^2},$$

$$\int_0^{\pi}t|F_m^{*\prime}(t)|dt=4H\int_0^{\pi}\frac{m^3t^2dt}{(1+m^2t^2)^2}<4H\int_0^{\infty}\frac{u^2}{(1+u^2)^2}du=H_2.$$

由定理 3, $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\ (C,1)$. 其余各項的証明是明显的.

系 2 在 $f(x+0)$ 和 $f(x-0)$ 都存在的点 x，我們有如下的"数集"：

$$G_x=[\min(f(x+0),f(x-0)),\ \max(f(x+0),\ f(x-0))].$$

当 $m\to\infty$, $h\to 0$ 时，$\sigma_m(f;x+h)$ 的一切极限点所成的集就是 G_x——关于 $(C,1)$ 的吉勃斯(Gibbs)集.

【証明】 設 $mh\to a(-\infty\leqslant a\leqslant+\infty)$. 由于

$$\int_0^h F_m(t)dt=\frac{1}{2m+2}\int_0^h\left[\frac{\sin(m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2dt$$

$$=\frac{2}{m+1}\int_0^h\frac{\sin^2(m+1)\frac{t}{2}}{t^2}dt+o(1)$$

$$=\int_0^{\frac{h(m+1)}{2}}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2du+o(1)=\int_0^{\frac{a}{2}}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2du+o(1),$$

所以从 §3 的定理 1，得到

$$\sigma_m(x+h)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$

$$+\frac{1}{\pi}[f(x+0)-f(x-0)]\int_0^{\frac{1}{2}a}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt+o(1).$$

由于 a 的任意性，所以 $\lim \sigma_m(x+h)$ $(m\to\infty,\ h\to 0)$ 可取 G_x 中的任一数值，事实上，当 $U\to\pm\infty$ 时，

$$\int_0^U \frac{\sin^2 t}{t^2}dt=\left[-\frac{\sin^2 t}{t}\right]_0^U+\int_0^U \frac{\sin 2t}{t}dt\to\int_0^{\pm\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\pm\frac{\pi}{2}.$$

假如 $s\in G_x$，那末 s 不是 $\sigma_m(x+h)$ 的极限值．証明完毕．

相应于系 1，对于 $\mathfrak{S}[f]$ 的共軛級数 $\overline{\mathfrak{S}}[f]$，我們有如下的結果：

系 3 假如 $\Psi_x(t)=\int_0^t |\psi_x(u)|du=o(t)$ $(t\to+0)$，那末 $\bar{\sigma}_m(x)-\bar{f}_m(x)=o(1)$，这里

$$\bar{\sigma}_m(x)=\frac{1}{m+1}\int_0^\pi \psi_x(t)\sum_{\mu=0}^m \overline{D}_\mu(t)dt,$$

$$\overline{D}_\mu=-\frac{1}{2\pi}\cot\frac{t}{2}+\frac{\cos\left(\mu+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi\sin\frac{t}{2}},$$

$$\bar{f}_m(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{m}}^\pi \cot\frac{t}{2}\psi_x(t)dt.$$

【証明】 由于

$$G_m(t)\equiv\frac{1}{m+1}\sum_{\mu=0}^m \overline{D}_\mu(t)=\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}-\frac{1}{4(m+1)}\frac{\sin(m+1)t}{\sin^2\frac{t}{2}},$$

所以 $\bar{\sigma}_m-\bar{f}_m=-J_1+J_2$，这里

$$J_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{m}}\psi_x(t)G_m(t)dt,\quad J_2=\frac{1}{4\pi(m\pm 1)}\int_{\frac{\pi}{m}}^\pi \psi_x(t)\frac{\sin(m+1)t}{\sin^2\frac{t}{2}}dt.$$

易証，当 $0<mt\leqslant\pi$ 时，有常数 A 适合

$$\left|\frac{\sin t}{t}-\frac{\sin(m+1)t}{(m+1)t}\right|<Am^2t^2.$$

因此，$|G_m(t)|<Am^2t$ $(0<mt<\pi)$．从而

$$|J_1|<Am^2\int_0^{\frac{\pi}{m}} t|\psi_x(t)|dt\leqslant A\pi m\Psi_x\left(\frac{\pi}{m}\right)=o(1).$$

又因

$$|J_2|\leqslant\frac{1}{4\pi(m+1)}\int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi}|\psi_x(t)|\cdot\left(\frac{\pi^2}{4}\right)4\frac{dt}{t^2}=\frac{\pi}{4(m+1)}\int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi}|\psi_x(t)|\frac{dt}{t^2}$$

$$\leqslant\frac{\pi}{4(m+1)}\left[\frac{\Psi_x(\pi)}{\pi^2}+2\int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi}\frac{\Psi_x(t)}{t^3}dt\right]=o(1).$$

所以 $\bar{\sigma}_m-\bar{f}_m=o(1)$. 証明完毕.

3. 阶 α 大于 -1 的(C,α)求和法

当阶 $\alpha=k$ 是自然数时，(C,α)的意义已述于前. 假設 $\alpha>-1$, 置

$$(\alpha)_n=A_n^\alpha=\binom{n+\alpha}{n}=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}.$$

当自然数 $n\to\infty$ 时, $(\alpha)_n\simeq\frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$. 当 $0<x<1$ 时,成立着

$$(1-x)^{-1-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_n x^n.$$

对于級数 $\sum a_n$, 置 $S_n=S_n^0=a_0+\cdots+a_n$, 那末,从

$$(1-x)^{-1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(1-x)^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}S_n^0x^n=\sum_{n=0}^{\infty}S_n^\alpha x^n$$

得到 $S_n^\alpha=\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha)_{n-\nu}a_\nu=\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha-1)_{n-\nu}S_\nu^0$. 置 $\sigma_n^\alpha=S_n^\alpha/A_n^\alpha$, 当极限式 $\sigma_n^\alpha\to S$ 成立时,称 $\sum a_n$ 或 $\{S_n\}$ 可用(C,α)**求和法**[*]求和,和是 S, 記着

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=S(C,\alpha)\quad\text{或是}\quad\lim_{n\to\infty}(C,\alpha)-S_n=S.$$

关于阶的增高,有如下的性质:

定理 1　当 $\alpha+h>\alpha>-1$ 时, $\sum a_n=S(C,\alpha)$含有

$$\sum a_n=S(C,\alpha+h).$$

【証明】 比較恒等式 $(1-x)^{-\alpha-\beta-2}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(1-x)^{-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}S_n^\beta x^n$ 两边的系数,得到

---

[*] 这种方法是蔡查罗創造的, C 是蔡查罗(Cesàro)的第一个字母.

$$S_n^{\alpha+\beta+1}=\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha)_{n-\nu}S_\nu^\beta \quad (n=0,\ 1,\ \cdots;\ \beta>-1,\ \alpha>-1).$$

因此,当 $a_n=1\ (n=0,\ 1,\ \cdots)$时,成立着 $(\alpha+\beta+1)_n=\sum\limits_{\nu=0}^{n}(\alpha)_{n-\nu}(\beta)_\nu$;从而

$$\sigma_n^{\alpha+h}=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(h-1)_{n-\nu}(\alpha)_\nu}{(\alpha+h)_n}\sigma_\nu^\alpha.$$

这是将数列 $\{\sigma_\nu^\alpha\}$ 施行变换

$$\left(\left(\frac{(h-1)_{n-\nu}(\alpha)_\nu}{(\alpha+h)_n}\right)\right)$$

而得的. 变换的元素都 $\geqslant 0$, 变换是正则的. 因此, 当 $\sigma_\nu^\alpha\to S$ 时, $\sigma_n^{\alpha+h}\to S$. 一般地說,当 $h>0$ 时,成立着

$$\liminf_{n\to\infty}\sigma_n^\alpha\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sigma_n^{\alpha+h}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sigma_n^{\alpha+h}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sigma_n^\alpha.$$

下面的定理給出关于$(C,\ \alpha)$可求和的級数的一个必要条件.

定理 2 設 $\alpha>-1$, 則当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=S\,(C,\ \alpha)$ 时, $a_n=o(n^\alpha)$.

【証明】 由于 $\sum a_nx^n=(1-x)^{-1-\alpha}\cdot(1-x)^{-(-\alpha-2)-1}\sum a_nx^n$,所以——写着 $\sigma_\nu^\alpha=S+\varepsilon_\nu$, 注意到 $(-1)_n=0$,——

$$\frac{a_n}{(\alpha)_n}=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(\alpha)_\nu(-\alpha-2)_{n-\nu}}{(\alpha)_n}(S+\varepsilon_\nu)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(\alpha)_\nu(-\alpha-2)_{n-\nu}}{(\alpha)_n}\varepsilon_\nu$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_{n\nu}\varepsilon_\nu,$$

其中 $\alpha_{n\nu}=\dfrac{(\alpha)_\nu(-\alpha-2)_{n-\nu}}{(\alpha)_n}=(\alpha)_\nu\cdot O\left[\dfrac{(n-\nu)^{-\alpha-2}}{n^\alpha}\right]=o(1)\quad(n\to\infty)$,

$$\sum_{\nu=0}^{n}|\alpha_{n\nu}|=\alpha_{n\nu}+\sum_{\nu=0}^{n-1}|\alpha_{n\nu}|=1+1=2\quad(-1<\alpha<0);$$

当 $\alpha\geqslant 0$ 时, $\sum\limits_{\nu=0}^{n}|\alpha_{n\nu}|=O\left(\sum k^{-2-\alpha}\right)=O(1)$. 因此, 由透普利次定理, $a_n/(\alpha)_n=o(1)$. 从而 $a_n=o(n^\alpha)$. 証明完毕.

現在再从 f 的連續性来推导 $\mathfrak{S}[f;\ x]$的$(C,\ 1)$求和.

定理 3 (費耶) 当 $f(x)$ 在$[a,\ b]$上具有連續性时,关系

$$\mathfrak{S}[f;\ x]=f(x)\,(C,\ 1)$$

在 $a\leqslant x\leqslant b$ 中均匀地成立.

【証明】 設 f 在 $[a, b]$ 上的連續模是 $\omega(\delta)$，那末从等式

$$\sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_n(t)\varphi_x(t)\,dt$$

知道：$|\sigma_n(x)-f(x)|$ 小于

$$\frac{2}{\pi}\omega(\delta)\int_0^\delta F_n(t)\,dt+\max_{\delta<t<\pi}F_n(t)\int_\delta^\pi|\varphi_x(t)|\,dt$$

$$\leqslant\omega(\delta)+\frac{1}{2(n+1)\sin^2\dfrac{\delta}{2}}\left[\int_{-\pi}^\pi|f(t)|\,dt+2|f(x)|\right].$$

因此，当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，

$$|\sigma_n(x)-f(x)|\leqslant\omega(\delta)+\frac{B}{n\delta^2}\qquad(B\text{: 常数}).$$

对于 $\varepsilon>0$，取 δ 足够小使 $\omega(\delta)<\frac{1}{2}\varepsilon$. 固定 δ，取 n_0 使 $B/n\delta^2<\frac{1}{2}\varepsilon$. 从而，当 $n>n_0$ 时，$|\sigma_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 定理証毕.

另一方面，費耶原来的定理："$f(x\pm0)$ 的存在含有 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$ $(C, 1)$"的証明，实际上包含着如下的結果：

系 假如求和的核 $K_m(t)$ 滿足下列三个条件：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi K_n(t)\,dt=1,\quad\max_{\delta<t<\pi}|K_n(t)|=o(1)\quad(0<\delta<\pi),$$

$$\int_{-\pi}^\pi|K_n(t)|\,dt=O(1),$$

那末当 $f(x\pm0)$ 存在时，写着 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x+t)K_n(t)\,dt\to f(x).$$

下述定理，闡明 $\sigma_n(f;x)$ 和 f 的上下界(限)的关系：

定理 4 (i) 假如周期函数 $f(x)$ 的一切函数值落在 $[m, M]$ 中，那末

$$m\leqslant\sigma_n(x)\leqslant M\quad(-\infty<x<\infty).$$

(ii) 假如在 $[a, b]$ 中，$m\leqslant f(x)\leqslant M$ 成立，那末在任一縮短区間 $[a+\delta, b-\delta]$ 中，当 $n>n_0$ 时，成立着

$$m-\delta\leqslant\sigma_n(x)\leqslant M+\delta.$$

(iii) 設 f 在点 x 的上限和下限分别是 $M(x)$ 和 $m(x)$，則

$$m(x)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sigma_n(x)\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sigma_n(x)\leqslant M(x);$$

当 $m(x)=M(x)=\infty$ 时，$\sigma_n(x)\to\infty$.

【証明】 (i) 由于 $m\leqslant f\leqslant M$，所以从

$$\sigma_n[f;x]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)F_n(t)\,dt,\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)\,dt=1 \text{ 和 } F_n(t)\geqslant 0$$

得到(i)中的两个不等式.

(ii) 設 $a+\delta\leqslant x\leqslant b-\delta$，則因

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}f(x+t)F_n(t)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt,$$

$$m\leqslant\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+t)F_n(t)\,dt\right|\leqslant M,$$

所以存在 n_0 如(ii)所述.

(iii) 于(ii)的証明中 m 和 M 分别以 $m-\varepsilon$ 和 $M+\varepsilon$ 代入，就得到

$$m(x)-\varepsilon-O\left(\frac{1}{n\delta^2}\right)\leqslant|\sigma_n(f;x)|\leqslant M(x)+\varepsilon+O\left(\frac{1}{n\delta^2}\right).$$

令 $n\to\infty$，再令 $\varepsilon\to 0$，我們見到(iii)的一切不等式成立. (iii)的最后部分是明显的. 証明完毕.

某一級数可用某种平均法求和时，再加上某些条件，那末这个級数非收斂不可. 这种类型的命題，一般地說叫做“討褒式定理”(参見第一章 §11). 下面建立一个討褒定理:

藍道 (E. Landau) **的定理** 假如 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S(C,1)$ 并且 $na_n>-K$ (K: 常数)，那末 $\sum a_n$ 收斂于 S.

我們称补充条件 $na_n>-K$ 为定理中的討褒条件. 在特殊的討褒条件 $na_n=O(1)$ 下，哈戴(G. H. Hardy)早就(1909)証明了上述定理.

【証明】 当証明时，不妨假設 $S=0$. 置 $\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu=S_n$，$\sum_{\nu=1}^{n}S_\nu=n\sigma_n$. 設 $0<\alpha<1$，$[\alpha k]=k'$. 由于

$$S_k=\frac{k\sigma_k-k'\sigma_{k'}}{k-k'}+\frac{1}{k-k'}\sum_{p=k'+1}^{k}(S_k-S_p),$$

所以，$\max(|\sigma_k|, |\sigma_{k'}|)=|\sigma_m|$ 的話，

$$\liminf_{k\to\infty} S_k \geqslant -\limsup_{k\to\infty}\frac{k+k'}{k-k'}|\sigma_m|$$
$$-\limsup_{k\to\infty}\frac{K}{k-k'}\sum_{p=k'+1}^{k}\left(\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{k}\right).$$

最后的和等于 $\log\frac{k}{k'}+o(1)\leqslant\log\frac{1}{\alpha}+o(1)$. 从而

$$\liminf_{k\to\infty} S_k \geqslant -\limsup_{k\to\infty}\left\{\frac{K}{k-k'}\sum_{p=k'+1}^{k}\left(\log\frac{1}{\alpha}+o(1)\right)\right\}=-K\log\frac{1}{\alpha}.$$

令 $\alpha\to1$，就得到

$$\liminf_{k\to\infty} S_k\geqslant 0.$$

同样，取 $[\beta k]=k''(\beta>1)$. 从

$$S_k=\frac{k''\sigma_{k''}-k\sigma_k}{k''-k}+\frac{1}{k''-k}\sum_{q=k+1}^{k''}(-S_q+S_k)$$

可以証明

$$\limsup_{k\to\infty} S_k\leqslant 0.$$

总結起来，$S_k\to0$. 証明完毕.

前述：$\Phi_x(t)=\int_0^t|\varphi_x(u)|du=o(t)$ 含有 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\,(C, 1)$ 是勒貝格(1905)所証明的. 后来比利时的脑盆扬 (P. Noaillon, 1913) 改进成如下的形式：

定理 5[*] 假如 $\int_0^t\varphi_x(u)du=o(t)$，那末当 $\Phi_x(t)=O(t)$ 时，

$$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\,(C, 1),$$

这里 $\varphi_x(u)=\frac{1}{2}[f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]$.

【証明】 我們要証

$$\sigma_{n-1}(x)-f(x)=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi_x(2t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2dt\to0.$$

---

[*] 这个定理后来又为坡拉特 (倫敦数学会期刊 J. L. M. S. 1, 1926) 以及耶歇勃 (M. Jacob) (J. L. M. S. 3, 1928) 再度三度发现.

或是，对于 $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$，証明

$$J_n=\frac{1}{n}\int_0^{\varepsilon}\varphi_x(2t)\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2dt=o(1)$$

就够了．由于，当 $0<nt\leqslant 1$ 时，

$$\frac{d}{dt}\frac{\sin nt}{t}=\frac{1}{t^2}[nt\cos nt-\sin nt]<0,$$

所以利用第二中值定理，$\left(0,\frac{1}{n}\right)$ 中存在如下的 ξ：

$$\frac{1}{n}\int_0^{\frac{1}{n}}\varphi_x(2t)\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2dt=n\int_0^{\xi}\varphi_x(2t)\,dt=o(1).$$

利用分部积分法于所余的积分，写着 $\varphi_1(t)=\int_0^t\varphi_x(u)\,du$，

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon}\varphi_x(2t)\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2dt=\frac{1}{2n}\left[\varphi_1(2t)\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2\right]_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon}$$

$$-\frac{1}{2n}\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon}\frac{\varphi_1(2t)}{t}\left[\frac{n\sin 2nt}{t}-\frac{2\sin^2 nt}{t^2}\right]dt.$$

第一项是 $o(1)$．应用費耶定理于积分

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon}\frac{\varphi_1(2t)}{t}\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2dt,$$

就知道它是 $o(1)$．最后，由于

$$\frac{1}{t}\varphi_1(2t)=o(1),\quad \int_0^t\left|d\left(u\frac{\varphi_1(2u)}{u}\right)\right|=\int_0^t|\varphi_x(2u)|\,du=O(t),$$

所以，从楊格的收斂定理，得到

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon}\frac{\varphi_1(2t)}{t}\frac{\sin 2nt}{t}dt=o(1).$$

总結起来，$J_n=o(1)$．定理証毕．

我們还要进一步深入研究三种条件：

費耶的条件　　$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ 的存在 $(=f(x))$．

脑盆揚的条件 $\begin{cases} \varphi_1(t)=\int_0^t \varphi_x(u)\,du=o(t), \\ \Phi_x(t)=\int_0^t |\varphi_x(u)|\,du=O(t). \end{cases}$

平均值条件　　$\varphi_1(t)=o(t)$

的性质.

H. 汉(Hahn)于1916年(德意志数学会年报第二十五卷)曾經举例闡明:平均值条件不含有 $\mathfrak{S}[f; x]$ 的 $(C, 1)$ 可求和. 因此, 我們知道脑盆揚定理中的第二个条件 $\Phi_x(t)=O(t)$ 是不可略去的.

有人說: 平均值条件 $\varphi_1(t)=o(t)$ 是 $\lim\sigma_n(f; x)$ 存在的一个必要条件, 例如霍勃松 (E. W. Hobson) 的《实变函数論》(The theory of functions of a real variable) II(1926)的 § 375 中就有这种看法. 这是不正确的;我們写着

$$\phi_1(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \varphi_x(u)\,du.$$

假如积分 $\int_0^t \phi_1(u)\,du$ 存在,我們又写着 $\phi_2(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \phi_1(u)\,du$ 等等. 当 $\phi_k(t)=o(1)\ (t\to 0)$ 时, 我們写着 $\phi_x(t)\to o\ (C, k)$. 假如这个关系对于某一 k 成立, 那末泛写着 $\varphi_x(t)\to o\ (C)$. 哈戴和立脫尔伍德曾經証明: 在 x 的附近,假如 $f(t)$ 是有界,那末

$$\varphi_x(t)\to o(C) \text{ 含有 } \sigma_n(f; x)\to f(x).$$

但是, 适合 $\varphi_x(t)\to o(C)$ 的有界函数, 未必适合 $\varphi_1(t)=o(t)$ [即 $\phi_1(t)=o(1)$]. 所以后者对于 $\sigma_n(f; x)\to f(x)$ 并非必要. 另一方面, 我們易証: "$\varphi_1(t)=o(t)$含有 $\mathfrak{S}[f; x]=f(x)\,(C, 2)$". 事实上,从定理5的証明,知道:有常数 A 适合

$$\sigma_n(x)-f(x)=A\int_0^e \frac{\varphi_1(2t)}{t}\,\frac{\sin 2nt}{t}\,dt+o(1).$$

由費耶的定理,积分的算术平均趋近于0. 因此

$$\frac{\sigma_1(x)+\sigma_2(x)+\cdots+\sigma_n(x)}{n}\to f(x),$$

这等价于 $\mathfrak{S}[f; x]=f(x)\,(C, 2)$. 这是勒貝格的定理, 詳見德国的数

学年刊(Math. Annalen) 61 (1905).

M. 黎斯(Riesz)和 S. 却普曼(Chapman)分别于1909年和1910年指出：费耶定理中的$(C, 1)$可以加强为(C, α) $(\alpha>0)$. 要証明这个結果，首先研究关于(C, α)求和的核：

$$K_n^\alpha(t)=\frac{1}{(\alpha)_n}\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha-1)_{n-\nu}D_\nu(t)\quad(\alpha>0),$$

由于 $D_\nu(t)=\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\Big/2\sin\frac{t}{2}$，所以 $2\sin\frac{t}{2}(\alpha)_nK_n^\alpha(t)$ 是

$$e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha-1)_\nu e^{-i\nu t}=e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}\left[(1-e^{-it})^{-\alpha}-\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(\alpha-1)_\nu e^{-i\nu t}\right]$$

的虛数部分．当 $0<\alpha<1$ 时，$(\alpha-1)_n<(\alpha-1)_{n-1}\sim n^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$，从而

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(\alpha-1)_\nu e^{-i\nu t}\right|<2(\alpha-1)_{n+1}|1-e^{-it}|^{-1},$$

这是实部和虛部分别經过阿培耳变换的結果．因此，

$$2\pi\sin\frac{t}{2}(\alpha)_n|K_n^\alpha(t)|\leqslant\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{-\alpha}+2(\alpha-1)_{n+1}\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{-1}.$$

这样，我們得到

$$K_n^\alpha(t)=O((nt)^{-\alpha}t^{-1})+O[(nt)^{-1}t^{-1}]\quad(0<\alpha<1).$$

另一方面，从 $|D_\nu(t)|\leqslant\frac{1}{2}+\overbrace{1+\cdots+1}^{\nu}<\nu+1$ 得到

$$|K_n^\alpha(t)|<(n+1)\sum_{0}^{n}(\alpha-1)_\nu/(\alpha)_n=n+1.$$

所以必有常数 A 适合于

$$|K_n^\alpha(t)|<\frac{An}{(1+nt)(1+(nt)^\alpha)}\quad(0<\alpha<1,\ 0\leqslant t\leqslant\pi).$$

事实上，当 $nt\leqslant1$ 时，$|K_n^\alpha|<n+1<\frac{8n}{(1+1)(1+1)}<\frac{8n}{(1+nt)(1+(nt)^\alpha)}$；又若 $nt>1$，那末

$$\frac{1}{t}\left(\frac{1}{nt}+\frac{1}{(nt)^\alpha}\right)<\frac{n}{nt}\left[\frac{1}{(nt)^\alpha}+\frac{1}{(nt)^\alpha}\right]<\frac{8n}{(1+nt)(1+(nt)^\alpha)}.$$

这样，我們見到

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n^\alpha(t)dt=1,\quad\lim_{n\to\infty}\max_{\delta<t<\pi}|K_n^{(\alpha)}(t)|=0,\quad\int_{-\pi}^{\pi}|K_n^\alpha(t)|dt<C.$$

因此，当 $f(x\pm0)$ 存在时，成立着

$$\mathfrak{S}[f;x]=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\ (C,\alpha)\quad(\alpha>0).$$

这是对于 $0<\alpha<1$ 証明的. 从而这个結果，对于任何正数 α 成立.

勒貝格的定理“$\Phi_x(t)=o(t)$ 含有 $\mathfrak{S}[f,x]=f(x)(C,1)$”，哈戴把它改进成如下的形式：当 $\Phi_x(t)=o(t)$ 时，对于任一正数 α，成立着

$$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\ (C,\alpha).$$

証明是簡单的；由于 $\pi\sigma_n^\alpha(x)=\int f(x+t)K_n^\alpha(t)dt$，所以

$$\sigma_n^\alpha(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\varphi_x(t)K_n^\alpha(t)\,dt=J_1+J_2,$$

这里

$$|J_1|=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\varphi_x(t)K_n^\alpha(t)\,dt\right|=O(n)\int_0^{\frac{1}{n}}|\varphi_x(t)|dt=o(1),$$

$$|J_2|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\varphi_x(t)K_n^\alpha(t)\,dt\right|$$

$$=O\Big[\Phi_x(t)n^{-\alpha}t^{-1-\alpha}\Big]_{\frac{1}{n}}^{\pi}+O(n^{-\alpha})\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}|\Phi_x(t)|t^{-2-\alpha}dt$$

$$=O(n^{-\alpha})+O\left(n\Phi_x\left(\frac{1}{n}\right)\right)=o(1).$$

現在把这个定理改进成脑盆揚的形式.

定理 6　設 $\int_0^t\varphi_x(u)du=o(t)$，$\int_0^t|\varphi_x(u)|du=O(t)$，則当 $\alpha>0$ 时，

$$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\ (C,\alpha).$$

【証明】　当 $0<\lambda t\leqslant1$ 时，$\sin\lambda t/t$ 是 t 的减少函数；应用第二中值定理于积分

$$J=\int_0^{\frac{2}{2n+1}}\varphi_x(t)\frac{t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\cdot\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(\alpha-1)_{n-\nu}}{(\alpha)_n}\frac{\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt$$

$$\left(=\int_0^{\frac{2}{2n+1}}\varphi_x(t)K_n^\alpha(t)\,dt\right).$$

我們見到有 $\delta\,(0<\delta<1)$ 适合

$$J=\int_0^{\frac{2\delta}{2n+1}}\varphi_x(t)\,\frac{t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(\alpha-1)_{n-\nu}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{(\alpha)_n}\,dt$$

$$=o\left(\frac{1}{n}\right)O(n)=o(1).$$

由于 $\int_0^t\varphi_x(t)\,dt=o(t)$，所以

$$g(t)=\int_0^t\varphi_x(t)\frac{t\,dt}{2\pi\sin\frac{t}{2}}=o(t).$$

写着

$$I=\int_{\frac{2}{2n+1}}^{\pi}\varphi_x(t)\,K_n^\alpha(t)\,dt=\int_{\frac{2}{2n+1}}^{\frac{2B}{2n+1}}+\int_{\frac{2B}{2n+1}}^{\pi}\varphi_x(t)\,K_n^\alpha dt=I_1+I_2,$$

这里 $B>1$，$0<\alpha<1$，

$$I_1=\left[g(t)\,K_n^\alpha(t)\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\right]_{\frac{2}{2n+1}}^{\frac{2B}{2n+1}}$$

$$-\int_{\frac{2}{2n+1}}^{\frac{2B}{2n+1}}g(t)\frac{d}{dt}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(\alpha-1)_{n-\nu}}{(\alpha)_n}\,\frac{\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt$$

$$=O\left[\left(n\frac{2B}{2n+1}\right)^{-\alpha}\right]+o(1)+\int_{\frac{2}{2n+1}}^{\frac{2B}{2n+1}}o(t)\left[O\left(\frac{n}{t}\right)+O\left(\frac{nt}{t^2}\right)\right]dt$$

$$=O(B^{-\alpha})+o(1)+o(1)+o(1)=O(B^{-\alpha}),$$

$$|I_2|=\left|\int_{\frac{2B}{2n+1}}^{\pi}\varphi_x(t)\,K_n^\alpha(t)\,dt\right|<A\int_{\frac{2B}{2n+1}}^{\pi}|\varphi_x(t)|\,n^{-\alpha}t^{-1-\alpha}dt.$$

由分部积分法最后的积分等于

$$\left[\Phi_x(t)\,An^{-\alpha}t^{-1-\alpha}\right]_{\frac{2B}{2n+1}}^{\pi}+An^{-\alpha}(1+\alpha)\int_{\frac{2B}{2n+1}}^{\pi}\Phi_x(t)\,t^{-2-\alpha}dt$$

$$=O(n^{-\alpha})+O(B^{-\alpha}).$$

总結起来，我們見到

$$\sigma_n^\alpha(x)-f(x)=I+J=o(1)+O(B^{-\alpha})+O(n^{-\alpha}).$$

从而 $\limsup_{n\to\infty}|\sigma_n^\alpha(x)-f(x)|=O(B^{-\alpha})$. 令 $B\to\infty$，即得

$$\sigma_n^\alpha(x)\to f(x).$$

4. 对称点求和法

三角級数——不一定是富理埃級数——

$$\text{(I)}\qquad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的逐項积分級数

$$\text{(II)}\qquad \frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n},$$

假如在区間 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 中收斂于 $F(x)$，那末我們可以考慮极限

$$\text{(III)}\qquad \lim_{h\to+0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0-h)}{2h}.$$

設此极限存在而等于 S，則称 (I) 在 $x=x_0$ 依勒貝格的**对称点求和法**，可以求和，和是 S. 假如对于一个数列 $\{h_n\}$，$h_n\to0$，(III) 当 $h=h_n$ 时，存在极限 S，那末(I)在 $x=x_0$，依广义勒貝格对称点求和法求和，和是 S. 由于

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0+h)-F(x_0-h)}{2h}&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2hk}[\sin k(x_0+h)-\sin k(x_0-h)]\\&\quad-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{2hk}[\cos k(x_0+h)-\cos k(x_0-h)]\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0)\frac{\sin kh}{kh},\end{aligned}$$

所以，写着 $S_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$，当 $a_n=o(1)$，$b_n=o(1)$ 时，利用阿培耳变换，上式可以改写成

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0-h)}{2h}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\sin nh}{nh}-\frac{\sin(n+1)h}{(n+1)h}\right]S_n(x_0),$$

記

$$\frac{\sin nh_m}{nh_m}-\frac{\sin(n+1)h_m}{(n+1)h_m}=\alpha_{mn},\quad 1-\frac{\sin h_m}{h_m}=\alpha_{m0},$$

那末

$$\frac{F(x_0+h_m)-F(x_0-h_m)}{2h_m}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}S_n(x_0).$$

当 $m\to\infty$ 时，$a_{mn}\to 0$；$\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}=1$. 但是 $((a_{mn}))$ 沒有满足 $\sum_n|a_{mn}|<\infty$，所以这个求和法缺少正則性．另一方面，当(I)的系数具有适当条件时(I)的收斂等价于(III)的存在．

定理 1 假如三角級数(I)的系数是 $o\left(\frac{1}{n}\right)$，或是更一般地，成立着

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu(|a_\nu|+|b_\nu|)=o(n),$$

那末(I)的收斂等价于极限(III)的存在．

【証明】 首先从 $k(n)=\sum_{\nu=1}^{n}\nu(|a_\nu|+|b_\nu|)=o(n)$ 导出(II)是一个匀斂級数．事实上，从 $|a_\nu|+|b_\nu|=\frac{1}{\nu}[k(\nu)-k(\nu-1)]$ 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n}\right|\leqslant\sum\frac{k(n)-k(n-1)}{n^2}$$

$$=\sum k(n)\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=O\left[\sum\frac{1}{n^2}\right]<\infty.$$

設 $F(x)$ 是(II)的和，这是一个 x 的連續函数．我們見到

$$\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}-S_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}-1\right)+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}A_\nu\frac{\sin\nu h}{\nu h},$$

这里 $S_n(x)=A_0+\cdots+A_n$，$A_0=\frac{a_0}{2}$，$A_\nu=a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x$. 設 n 表示 $\frac{1}{h}$ 的整数部分，則当 $1\leqslant\nu\leqslant n$ 时，

$$\left|\frac{\sin\nu h}{\nu h}-1\right|\leqslant\frac{|\nu h|^2}{6}<|h|\nu,$$

从而

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}-1\right)\right|\leqslant|h|\sum_{\nu=1}^{n}\nu(|a_\nu|+|b_\nu|)=o(|hn|)=o(1),$$

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}A_\nu\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right|\leqslant\frac{1}{|h|}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(|a_\nu|+|b_\nu|)\frac{1}{\nu}$$

$$\leqslant\frac{1}{|h|}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}k(\nu)\left(\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{(\nu+1)^2}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{|h|}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}o\left(\frac{1}{\nu^2}\right)=o\left(\frac{1}{n|h|}\right)=o(1),$$

总而言之，当 $n=\left[\frac{1}{h}\right]$ 时，成立着

$$\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}-S_n(x)=o(1),$$

这就建立着定理 1. 还应注意：对称点求和法是不具有正則性的.

洛各淨斯基的求和法　設 $\mu_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$，則当

$$\frac{1}{2}\{S_n(x+\mu_n)+S_n(x-\mu_n)\}\to S$$

时，称(I)可用洛各淨斯基(W. W. Rokosinski)的对称法求和，和是 S (参見德国数学时刊(Math. Zeits.) 25(1926)).

定理 2　假如(I)在 $x=x_0$ 可用算术平均法求得和 S，那末当 ρ 是一奇数时，成立着

$$\lim_{n\to\infty}\left\{S_n\left(x+\frac{\rho\pi}{2n}\right)+S_n\left(x-\frac{\rho\pi}{2n}\right)\right\}=S.$$

这个定理可从下面的引理导出.

引理　設当 $x\geqslant 0$ 时，$\phi(x)$ 的二次导函数是連續的. 設

$$\Delta_n(m)=\phi(n\mu_m)-\phi((n+1)\mu_m),\quad \mu_m=O\left(\frac{1}{m}\right),$$

那末，当 $\sum u_n=S(C,1)$ 时，$\sum_{n=0}^{m}u_n\phi(n\mu_m)=t_m$ 的話，成立着

$$t_m-(S_m-S)\phi(m\mu_m)\to S\phi(0),$$

这里 $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

事实上，設(I)为 $\sum u_n$，$\phi(t)=\cos t$，那末 t_m 等于

$$\sum_{n=0}^{m}u_n\cos n\mu_m=\frac{1}{2}\{S_m(x+\mu_m)+S_m(x-\mu_m)\}.$$

从而得到

$$\frac{1}{2}\{S_m(x+\mu_m)+S_m(x-\mu_m)\}-[S_m(x)-S]\cos m\mu_m\to S,$$

当 $\mu_m=\frac{p\pi}{2m}$ 时，$\cos m\mu_m=0$；由是获得定理 2.

現在証明引理．写着 $\Delta_n^2(m)=\Delta_n(m)-\Delta_{n+1}(m)$，由阿培耳变換，

$$t_m=\sum_{n=0}^{m-1}S_n\Delta_n(m)+S_m\phi(m\mu_m)$$

$$=\sum_{n=0}^{m-2}(n+1)\sigma_n\Delta_n^2(m)+m\sigma_{m-1}\Delta_{m-1}(m)+S_m\phi(m\mu_m),$$

这里 $(n+1)\sigma_n=S_0+S_1+\cdots+S_n$．特别，对于 $u_0=1$, $u_n=0(n>0)$，$S_n=\sigma_n=1$，上式变成

$$\phi(0)=\sum_{n=0}^{m-2}(n+1)\Delta_n^2(m)+m\Delta_{m-1}(m)+\phi(m\mu_m).$$

結合两式，我們得到 $T_m-S\phi(0)=\sum_n a_{mn}(\sigma_n-S)$，这里

$$T_m=t_m-(S_m-S)\phi(m\mu_m),$$

$$a_{mn}=(n+1)\Delta_n^2(m)\quad(n<m-1),$$

$$a_{m,m-1}=m\Delta_{m-1}(m),\quad a_{mn}=0\quad(n\geqslant m).$$

由于 $\Delta_n(m)=O\left(\frac{1}{m}\right)$，$\Delta_n^2(m)=O\left(\frac{1}{m^2}\right)$，所以

$$\lim_{m\to\infty}a_{m,n}=0.$$

又因 $\sum_n|a_{mn}|=O\left(\sum_{n<m-1}\frac{n+1}{m^2}+\frac{m}{m}\right)=O(1)$，关于 m 是均匀的．因此，$((a_{mn}))$ 具有正則性，当 $\sigma_n\to S$ 时，$T_m\to S\phi(0)$．引理証毕.

系 1 假如 f 在点 x 是連續的，那末当 $h_m\to 0$ 时，

$$\frac{1}{2}\left\{S_m(x+h_m)+S_m\left(x+h_m+\frac{\pi}{m}\right)\right\}\to f(x).$$

【証明】 由 §3 的定理 1，我們見到 $\sigma_m(x+h_m)\to f(x)$．又因

$$\frac{1}{2}\left\{S_m(x+h_m)+S_m\left(x+h_m+\frac{\pi}{m}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{m}A_n\left(x+h_m+\frac{\pi}{2m}\right)\cos\frac{n\pi}{2m},$$

这相当于 t_m，但 $\phi(t)=\cos t$，$\mu_m=\frac{\pi}{2m}$．由于 $\phi(m\mu_m)=0$，所以 $T_m=t_m$．由引理得到所要的結果．証明完毕.

系 2 設 $\mu_m=O\left(\frac{1}{m}\right)$, 則当 $\sum u_n=S$ 时, $\sum_{n=0}^{m}u_n\phi(n\mu_m)\to S\phi(0)$.

系 3 假如 $\phi(0)=0$, 那末当 $\sum u_n$ 收斂时, $\sum_{n=0}^{m}u_n\phi(n\mu_m)\to 0$; 又当 $\sum u_n$ 可以 $(C, 1)$ 法求和时,

$$\sum_{n=0}^{m}u_n\phi(n\mu_m)-(S_m-S)\phi(m\mu_m)\to 0.$$

例如 $\phi(t)=\sin t$, 那末对于(I)来說, t_m 是

$$\frac{1}{2}\{S_m(x+\mu_m)-S_m(x-\mu_m)\}=-\sum_{\nu=1}^{m}(a_\nu\sin\nu x-b_\nu\cos\nu x)\sin\nu\mu_m,$$

由是, 当(I)的共軛級数收斂时, $S_n(x+\mu_n)-S_n(x-\mu_n)\to 0$; 又当 (I) 的共軛級数的 $(C, 1)$ 和是 $\bar{S}$ 时,

$$\frac{1}{2}\{S_m(x+\mu_m)-S_m(x-\mu_m)\}+(\bar{S}_m(x)-\bar{S})\sin m\mu_m\to 0.$$

5. 求和过程中的吉勒斯现象

設函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在点 x_0 的右方是定义着的, 并且 $\lim\varphi_n(x)=\varphi(x)$ 和 $\varphi(x_0+0)$ 都存在. 假如当 $n\to\infty$, $x\to x_0$ 时的二重上限大于 $\varphi(x_0+0)$:

$$\limsup_{n\to\infty,\ x\to x_0+0}\varphi_n(x)>\varphi(x_0+0),$$

或是二重下限小于 $\varphi(x_0+0)$:

$$\liminf_{n\to\infty,\ x\to x_0+0}\varphi_n(x)<\varphi(x_0+0)$$

那末我們称 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 x_0 的右方具有**吉勒斯现象**. 同样可定 x_0 左方的吉勒斯现象. 例如 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx/n$ 的最初 n 之和 $S_n(x)$ 是

$$\int_0^x(\cos t+\cdots+\cos nt)\,dt=\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\frac{\sin t}{t}\,dt+\int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt-\frac{x}{2}.$$

从而

$$S_n(x)=-\frac{x}{2}+\int_0^{nx}\frac{\sin t}{t}dt+o(1).$$

函数 $y=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ 在 $x=\pi$, 3π, 5π, … 有极大値，其相应的极大値是逐漸減小的；它又在 $x=2\pi$, 4π, … 等点有极小值，其相应的极小值是逐漸增大的，事实上，对于自然数 k，积分

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}dt=(-1)^k\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{k\pi+t}dt$$

的絕对値是 k 的減少叙列．由是，曲綫 $y=S_n(x)$ 凝集于 $x=0$ 的附近，其"最高点"的高是 $\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt$:

$$S_n\left(\frac{\pi}{n}\right)\to\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt.$$

另一方面，$S_n(x)=\frac{\pi-x}{2}+o(1)$．当 $x\to0$ 时，$\lim S_n(x)$ 趋近于 $\frac{\pi}{2}$．两者的比等于

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt\Big/\frac{\pi}{2}=1.179\cdots>1.$$

由是，$\sum\sin nx/n$ 在 $x=0$ 具有吉勃斯现象．这种现象，是吉勃斯 (W. Gibbs) 于 1899 年首先发現的．下面的定理是具有一般性的．

定理 1 有界变差函数 f 的 $\mathfrak{S}[f]$，在它的第一种不連續点，也只有在这种点，显出吉勃斯现象．

【証明】 首先注意：在 f 的任一連續点 x_0 的附近，$\mathfrak{S}[f]$ 是匀斂的．事实上，在 x_0 的附近，$\mathfrak{S}[f]$ 的費耶和 $\sigma_n(x)$ 是匀斂于 $f(x)$ 的．那末，由于 $\mathfrak{S}[f]$ 的系数是 $O\left(\frac{1}{n}\right)$，所以利用藍道定理的証明，从

$$\liminf_{k\to\infty}(S_k(x)-f(x))$$

$$\geqslant-\limsup_{k\to\infty}\frac{k+k'}{k-k'}|\sigma_m(x)-f(x)|-\limsup_{k\to\infty}K\log\frac{k}{k'},$$

得到 $\liminf\limits_{k\to\infty}(S_k(x)-f(x))\geqslant0$ 均匀地在 x_0 的附近成立．同样，

$$\limsup_{n\to\infty}[S_n(x)-f(x)]\leqslant0$$

均匀地在 x_0 的附近成立．从而在 x_0 的附近，$S_n(x)$ 匀斂于 $f(x)$．

置 $d=f(x_0+0)-f(x_0-0)$，$2f(x)=f(x_0+0)+f(x_0-0)$，我們考虑函数 $g(x)=f(x)-\frac{d}{\pi}\phi(x-x_0)$，$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$，在 x_0 的附近的情况．由于 $\phi(x)=\frac{\pi-x}{2}$ $(0<x<2\pi)$，所以

$$g(x_0\pm 0)=f(x_0\pm 0)\mp\frac{d}{\pi}\frac{\pi}{2},$$

从而 $g(x_0+0)=g(x_0-0)=g(x_0)=f(x_0)$．由是在 x_0 的附近，$\mathfrak{S}[g]$ 匀斂于 $g(x)$．当 $d\neq 0$ 时，$-\frac{d}{\pi}\phi(x-x_0)$ 在 x_0 具有吉勃斯現象，因此 $f(x)$ 在 x_0 也显出吉勃斯現象．假如 $d=0$，那末 $f(x)$ 在 x_0 是連續的，$S_n(x)$ 匀斂于 $f(x)$，$f(x)$ 在 x_0 沒有吉勃斯現象．定理証毕．

定理 2 設 x_0 是 f 的一个第一种不連續点，則在 $(0, 1)$ 中，有常数 α_0，当 $\alpha<\alpha_0$ 时，$\sigma_n^\alpha[f;x]$ 在点 x_0 显出吉勃斯現象，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时，$\{\sigma_n^\alpha[f;x]\}$ 在 x_0 沒有吉勃斯現象．

【証明】 設 $h>0$，經过正則变换 $(((h-1)_{n-\nu}(\alpha)_\nu/(\alpha+h)_n))$，$\{\sigma_\nu^\alpha\}$ 变成 $\{\sigma_n^{\alpha+h}\}$．設 $m(x_0)$ 和 $M(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的上限与下限．假如当 $|x-x_0|\leqslant\eta$，$n>n_0$ 时，成立着

$$m(x_0)-\varepsilon\leqslant\sigma_n^\alpha(x)\leqslant M(x_0)+\varepsilon.$$

那末当 $|x-x_0|\leqslant\eta$，$n>n_1$ 时，可使

$$m(x_0)-2\varepsilon\leqslant\sigma_n^{\alpha+h}(x)\leqslant M(x_0)+2\varepsilon$$

成立．因此，假如 $\{\sigma_n^\alpha(x)\}$ 在 x_0 不显出吉勃斯現象，那末 $\{\sigma_n^{\alpha+h}(x)\}$ 在 x_0 也不会显出吉勃斯現象．我們已經知道：$\{\sigma_n^0(x)\}$ 在 x_0 具有吉勃斯現象，并且知道 $\{\sigma_n^1(x)\}$ 在 x_0 不显出吉勃斯現象．由是，存在如下的 α_0，$0\leqslant\alpha_0\leqslant 1$，$\alpha_0$ 是 $\{\sigma_n^\alpha\}$ 在 x_0 显出吉勃斯現象的 α 的上限．假如 $0<\alpha_0<1$，那末当 $0<\alpha<\alpha_0$ 时，$\{\sigma_n^\alpha\}$ 在 x_0 具有吉勃斯現象；当 $\alpha_0<\alpha$ 时，$\{\sigma_n^\alpha\}$ 在 x_0 无吉勃斯現象．

由定理 1 的証明，我們只要对于函数

$$f(x)\sim\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\cdots$$

来証明定理就够了. 由于这个級数的导級数是 $\cos x+\cos 2x+\cdots$, 所以

$$\sigma_n^\alpha(x)\equiv\sigma_n^\alpha(f;x)=-\frac{x}{2}+\int_0^x K_n^\alpha(t)dt=\frac{1}{2}(\pi-x)-\int_x^\pi K_n^\alpha(t)dt.$$

由是 $\sigma_n^1(x)$ 等于

$$-\frac{x}{2}+\frac{2}{n+1}\int_0^x\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{t}\right)^2 dt$$

$$+\frac{2}{n+1}\int_0^x \sin^2(n+1)\frac{t}{2}\left[\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}-\frac{1}{t^2}\right]dt$$

$$=-\frac{x}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}(n+1)x}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

在区間 $0<x<2\pi$ 上, $\sigma_n(x)\to\frac{\pi-x}{2}$; 从上式得到

$$\int_0^\infty\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt=\frac{\pi}{2}.$$

因此, 我們得到

$$\sigma_n^1(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)-\int_{\frac{1}{2}(n+1)x}^\infty\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$<\frac{\pi}{2}-\int_{nx}^\infty\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

对于一定的正数 l, 存在正数 $\delta=\delta(l)$ 和 $n_0=n_0(l)$, 当 $0\leqslant nx\leqslant l$, $n>n_0$ 时,

$$\sigma_n^1(x)<\frac{\pi}{2}-\delta.$$

現在 $\sigma_n^\alpha(x)=\frac{\pi-x}{2}-\int_x^\pi K_n^\alpha(t)dt$ 中的 $K_n^\alpha(t)$ 是下式的虚部:

$$\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{(\alpha)_n\left(2\sin\frac{t}{2}\right)}\Big[(1-e^{-it})^{-\alpha}-(\alpha-1)_{n+1}e^{-i(n+1)t}(1-e^{-it})^{-1}$$

$$-\sum_{\nu=n+1}^\infty(\alpha-2)_{\nu+1}e^{-i(\nu+1)t}(1-e^{-it})^{-1}\Big].$$

从而

$$K_n^\alpha(t)=\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right)t-\frac{\pi}{2}\ \pi\alpha\right]}{(\alpha)_n\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha+1}}+\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{1}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$+\frac{2\theta\,\alpha(1-\alpha)}{(n+1)(n+2)\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^3},$$

这里 $|\theta|\leqslant 1$. 由是,

$$\sigma_n^\alpha(x)=\frac{\pi-x}{2}-\frac{\alpha\cot\frac{x}{2}}{2(n+1)}+\frac{O(1)}{n(\alpha)_n\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{\alpha+1}}+O\left(\frac{1}{n^2x^3}\right).$$

当 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 时,最后三項的和是

$$-\frac{\alpha\cot\frac{x}{2}}{2(n+1)}[1+o(1)].$$

由是易証: 当 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$ 时,存在正数 l_1 和 n_1, 当

$$\frac{l_1}{n}\leqslant x\leqslant\pi,\quad n\geqslant n_1$$

时, $|\sigma_n^\alpha(x)|\leqslant\frac{\pi}{2}$. 另一方面,我們能証: 当 $0\leqslant x\leqslant\frac{l_1}{n}$ 时, 只要 α 很接近于 1, $|\sigma_n^\alpha(x)|\leqslant\frac{\pi}{2}$. 事实上, $|\sigma_n^\alpha(x)-\sigma_n^1(x)|$ 小于

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{(\alpha)_{n-\nu}}{(\alpha)_n}-\frac{(1)_{n-\nu}}{(1)_n}\right)\left|\frac{\sin\nu x}{\nu}\right|\leqslant x\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{(\alpha)_{n-\nu}}{(\alpha)_n}-\frac{(1)_{n-\nu}}{(1)_n}\right]$$

$$=x\left(\frac{(\alpha+1)_n}{(\alpha)_n}-\frac{(2)_n}{(1)_n}\right).$$

从而

$$|\sigma_n^\alpha(x)-\sigma_n(x)|\leqslant\frac{nx(1-\alpha)}{2(1+\alpha)},$$

$$|\sigma_n^\alpha(x)|\leqslant\frac{nx(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}+\frac{\pi}{2}-\delta\quad(0\leqslant nx\leqslant l,\ n>n_0).$$

因此,当 $(1-\alpha)l<2\delta$ 时, $|\sigma_n^\alpha(x)|\leqslant\frac{\pi}{2}\left(0\leqslant x\leqslant\frac{l_1}{n}\right)$. 总結起来:

$$|\sigma_n^\alpha(x)|\leqslant\frac{\pi}{2}\quad(n>n_1,\ 0\leqslant x\leqslant\pi,\ \alpha_1\leqslant\alpha\leqslant1).$$

所以,对于 $\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant1$, $\{\sigma_n^\alpha(x)\}$ 不显出吉勃斯現象.

由是,存在如下的 α_0: $0<\alpha_0<1$, 当 $0\leqslant\alpha<\alpha_0$ 时, $\{\sigma_n^\alpha(x)\}$ 具有吉勃斯現象;当 $\alpha_0<\alpha$ 时, $\{\sigma_n^\alpha(x)\}$ 沒有吉勃斯現象.

余下的証明, 是要明确 $\{\sigma_n^{\alpha_0}(x)\}$ 在 $x_0=0$ 沒有吉勃斯現象. 設 $\alpha>\alpha_0$, 則利用上面的計算,

$$|\sigma_n^\alpha(x)-\sigma_n^{\alpha_0}(x)|\leqslant x\left[\frac{(\alpha_0+1)_n}{(\alpha_0)_n}-\frac{(\alpha+1)_n}{(\alpha)_n}\right]$$
$$=\frac{(\alpha-\alpha_0)n}{(\alpha+1)(\alpha_0+1)}x.$$

假如 $\{\sigma_n^{\alpha_0}(x)\}$ 在 $x_0=0$ 具有吉勃斯現象, 那末有收斂于 0 的 $\{x_n\}$ 和正数 ε 使

$$\sigma_n^{\alpha_0}(x_n)>\frac{\pi}{2}+\varepsilon.$$

从而,当 $nx_n<l$, $0<\alpha-\alpha_0<\eta$ 时,可使

$$\sigma_n^\alpha(x_n)>\frac{\pi}{2}+\varepsilon-\frac{(\alpha-\alpha_0)nx_n}{(\alpha+1)(\alpha_0+1)}>\frac{\pi+\varepsilon}{2},$$

因此, $\{\sigma_n^\alpha(x)\}$ 也显出吉勃斯現象,这是不可能的. 定理証毕.

我們从 § 4 的定理 1 知道,当 $\mathfrak{S}[f]$ 的系数 a_ν, b_ν 满足

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu(|a_\nu|+|b_\nu|)=o(n)$$

时, $\mathfrak{S}[f;x]$ 的收斂等价于

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\frac{\sin hn}{hn}\right]$$

的存在. 另一方面,对于級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 假如

$$\lim_{h\to0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^k=S\quad(k\geqslant1)$$

成立,那末我們可以說: $\sum u_n$ 可以用 (R,k) 求和法求和. 对于 $\mathfrak{S}[f]$ 而言, 上述定理指出 $(R,1)$ 等价于 $(C,0)$——在条件 $\sum_{\nu=1}^{n}\nu(|a_\nu|+|b_\nu|)=o(n)$ 下. 但是我們还可以研究求和过程中的吉勃斯現象. 对于

$\mathfrak{S}[f]=\sum A_n(x)$，作

$$R_h(f;\,x)\equiv R_h(x)=A_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)\frac{\sin nh}{nh}.$$

設 $\mu=\mu(h)=o(1)\,(h\to0)$，称极限值 $\lim\limits_{h\to0}R(x+\alpha(h))$ 的全体为 $\mathfrak{S}[f]$ 在点 x 的**黎曼-吉勒斯集**. 李經熙証明(数学学报 6, 1956)

定理 3 設 f 是一有界变差的函数，x_0 是 f 的一个不連續点，那末 $\mathfrak{S}[f]$ 在 x_0 的黎曼-吉勒斯集是以 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ 为中心、$\frac{1}{2}|f(x+0)-f(x-0)|$ 为半徑的閉区間.

【証明】 置 $d=f(x_0+0)-f(x_0-0)\,(\neq0)$. 函数

$$g(x)=f(x)-\frac{d}{\pi}\phi(x-x_0)$$

的 $\mathfrak{S}[g]$ 在 x_0 的附近匀斂于 $g(x)$，这是在定理 1 的証明中已經說过的. 从而 x_0 是 $g(x)$ 的一个連續点，$\mathfrak{S}[g]$ 的一般項 $\alpha_n(x)$ 适合

$$\alpha_n(x)=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

这里 $g(x)=\sum\alpha_n(x)$. 写着

$$R_h(g;\,x)-g(x)=\sum\alpha_n(x)\left[\frac{\sin nh}{nh}-1\right],\quad \mu_1=\left[\frac{1}{\sqrt{|h|}}\right],$$

$$\max_{N\geqslant\mu_1,\,|x-x_0|\leqslant\delta}\left|\sum_{n=\mu_1}^{N}A_n(x)\right|=\eta.$$

那末当 $h\to0$ 时，$\eta\to0$. 置 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right]$. 設在 $\mu_1\leqslant n\leqslant\mu_2$, $\cdots$, $\mu_{N-1}\leqslant n\leqslant\mu_N$ 中 $\frac{\sin nh}{nh}-1$ 是 n 的单調函数，那末 $\mu_\nu-\mu_{\nu-1}=O\left(\frac{1}{h}\right)$. 从而

$$\left|\sum_{n=\mu_1}^{\mu_N}\alpha_n(x)\left[\frac{\sin nh}{nh}-1\right]\right|\leqslant3\eta\sum_{\nu=1}^{N}\left|\frac{\sin\mu_\nu h}{\mu_\nu h}-1\right|\leqslant6\eta N.$$

由于 $\alpha_n(x)=O\left(\frac{1}{n}\right)$，所以有常数 A, A_1 适合于

$$\left|\sum_{n=\mu_N+1}^{\infty}\alpha_n(x)\left(\frac{\sin nh}{nh}-1\right)\right|\leqslant A\sum_{n=\mu_N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2h}+\left|\sum_{n=\mu_N+1}^{\infty}\alpha_n(x)\right|$$

$$<\frac{A}{\mu_Nh}+\eta<\frac{2A}{N}+\eta.$$

总結起来，$R_h(g;\,x)-g(x)$ 的絕对值小于

$$\left|\sum_{n=1}^{\mu_1-1}a_n(x)\left[\frac{\sin nh}{nh}-1\right]\right|+6\eta N+\frac{2A}{N}+\eta$$

$$<A_2\left(1-\frac{\sin\mu_1 h}{\mu_1 h}\right)+6\sqrt{\eta}+4A\sqrt{\eta}+\eta=o(1)\quad(h\to 0)$$

均匀地成立，A_2 是一常数. 由是，当 $h\to 0$ 时，在 $|x-x_0|\leqslant\delta$ 中，$R_h(g;x)$ 匀斂于 $g(x)$.

这样一来，我們从

$$R_h(f;x)=R_h(g;x)+\frac{f(x_0-0)-f(x_0+0)}{\pi}R_h\left(\sum\frac{\sin nx}{n};x\right)$$

知道 $R_h(f;x)\,(h\to 0,\ x\to x_0)$ 的极限值是落在区間

$$\left[\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}+\frac{f(x_0-0)-f(x_0+0)}{2},\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}\right.$$

$$\left.-\frac{f(x_0-0)-f(x_0+0)}{2}\right]=[f(x_0-0),f(x_0+0)]$$

中，区間中的任一值是 $R_h(f;x)\,(h\to 0,\ x\to x_0)$ 的一个极限值. 定理証毕.

当 $k>1$ 时，(R,k) 求和法的性质与 $(R,1)$ 很不相同.

定理 4 当 $k>1$ 时，(R,k) 求和法具有正則性.

【証明】 我們要从 $\sum u_n=S$ 导出

$$\lim_{h\to 0}\sum u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^k=S.$$

对于 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n'>n\geqslant N$ 时 $\left|\sum_{n+1}^{n'}u_n\right|<\varepsilon$. 对于固定的 N，取 $|h|$ 很小，可使

$$\left|u_0+\sum_{n=1}^{N}u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^k-\sum_{n=0}^{N}u_n\right|<\varepsilon.$$

从而 $\left|\sum_{n=0}^{N}u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^k-S\right|<2\varepsilon$. 另一方面，写着 $\rho_n=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}u_\nu$,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^k=\sum_{n=N+1}^{\infty}(\rho_{n-1}-\rho_n)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^k$$

$$=\rho_N\left(\frac{\sin(N+1)h}{(N+1)h}\right)^k-\sum_{n=N+1}^{\infty}\rho_n\left[\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^k-\left(\frac{\sin(n+1)h}{(n+1)h}\right)^k\right],$$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^k\right| \leqslant \varepsilon+\varepsilon\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\int_{nh}^{(n+1)h}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^k dt\right|$$

$$<\varepsilon+\varepsilon\int_0^{\infty}\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^k\right|dt,$$

由于

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^k = k\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{k-1}(t\cos t-\sin t)t^{-2}$$

$$=\begin{cases}O(t) & (t\to 0),\\ O(t^{-k}) & (t\to\infty),\end{cases}$$

所以上面的积分是收斂的. 由是可知,对于 ε, 有常数 A 和 h_0 如下:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^k - S\right| < A\varepsilon \quad (|h|<h_0).$$

証明完毕.

定理 5 設 k 是大于 1 的自然数, $\mathfrak{S}[f]$ 是一勒貝格-富理埃級数,那末 $\mathfrak{S}[f;x]$ 几乎处处可用 (R, k) 平均法求和,和是 $f(x)$.

【証明】 首先証明:当 m 是一个自然数时,

$$\left(\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}dt\right)^m f(t) = \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^m,$$

当 $m=1$ 时,

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{2h}\left\{\frac{1}{2}a_0\cdot 2h+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n(x+h)-A_n(x-h)]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)\frac{\sin nh}{nh}.$$

假如

$$\left(\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}dt\right)^{m-1} f(t) = \sum_{0}^{\infty} A_n(x)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^{m-1},$$

那末从 $A_n(x+h)-A_n(x-h)=2A_n(x)\dfrac{\sin nh}{n}$, 就知公式当 m 时成立.

另一方面,写着

$$\Delta^k F(x, h) = \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}\binom{k}{\nu}F(x+(k-2\nu)h).$$

而 $F(x)$ 是 $\sum A_n(x)$ 經过 k 次逐項积分的和,那末

$$\left(\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}dt\right)^k f(t) = \frac{\Delta^k F(x, h)}{(2h)^k}.$$

当 $k=2$ 时，假如 $F''(x)$ 存在，那末

$$\left|\frac{\Delta^2 F(x,h)}{h^2}-F''(x)\right|=\left|\int_0^h \frac{2t}{h^2}\left[\frac{F'(x+t)-F'(x-t)}{2t}-F''(x)\right]dt\right|$$
$$\leqslant \max_{0<t\leqslant h}\left|\frac{F'(x+t)-F'(x-t)}{2t}-F''(x)\right|\to 0.$$

这里 $F(x)=\frac{a_0}{4}x^2+Cx+D-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}$ 的导数 $F'(x)$ 是到处存在的．由于 $F''(x)=f(x)$ 几乎处处成立，所以定理当 $k=2$ 时成立．

假如 $\mathfrak{S}[f;x]$ 可用 $k-1$ 次黎曼平均法 $(R,k-1)$ 求和，那末

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^k F(x,h)}{(2h)^k}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial h}\Delta^k F(x,h)}{2k(2h)^{k-1}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2k}\frac{1}{(2h)^{k-1}}\left[\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{k}{\nu}(k-2\nu)F'(x+(k-2\nu)h)\right]$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2k}\frac{1}{(2h)^{k-1}}\left\{\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu k\left[\binom{k-1}{\nu}-\binom{k-1}{\nu-1}\right]F'(x+(k-2\nu)h)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^{k-1}F'(x,h)}{(2h)^{k-1}}.$$

由数学归納法，$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\ (R,k)$ 对于任一自然数 $k(>1)$ 几乎处处成立．定理証毕．

函数 $f(x)=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$ 是适合 $f(x+2\pi)\equiv f(x)$ 的，但是在区間 $[-\pi,\pi]$ 上不可以用勒貝格的意义来积分．假如我們采取柯西的主値积分：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\,dx,$$

那末，由于 $f(-x)=-f(x)$，$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$．这样，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=1,$$

最后的积分是在黎曼意义下存在的．由是 $f(x)$ 具有主值积分富理埃級数：

$$\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx.$$

将它逐項积分:

$$F(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\quad(0<x<2\pi).$$

由于 $(F(x+h)-F(x-h))/2h\to\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}(h\to 0)$, 所以

$$\sum\sin nx=\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}\ (R,\ 1).$$

对于这个級数,李經熙还指出下面的吉勃斯現象: 当 $x\to 0$, $h\to 0$, $\frac{x}{h}\to\beta$, $\beta\geqslant 0$ 时,

$$\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}\Big/f(x)=\rho$$

的一切极限值构成半直綫 $0\leqslant\lim\rho\leqslant\infty$ (詳数学学报第九卷, 1959). 事实上, $\lim\limits_{h\to 0}\rho$ 等于

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\tan\frac{x}{2}\log\left|\frac{\sin\frac{1}{2}(x+h)}{\sin\frac{1}{2}(x-h)}\right|\right\}$$

$$=\frac{\beta}{2}\lim\log\left|\frac{x+h}{x-h}\right|=\frac{\beta}{2}\log\left|\frac{\beta+1}{\beta-1}\right|.$$

当 β 在$[0,\ 1]$上变动时, $\lim\rho$ 的变动范圍为$[0,\ \infty]$.

6. 共軛級数及一級数

阿培耳求和法,是一級数的一个效用. 我們已經知道: $\sum a_n=S$ 含有 $\sum a_n=S(A)$. 此事实包含在下述定理1中.

定理 1 当 $\alpha>-1$ 时, $\sum a_n=S(C,\ \alpha)$含有 $\sum a_n=S(A)$.

【証明】 設实数系数的一級数 $\sum \alpha_n x^n(\alpha_n>0)$ 和 $\sum\beta_n x^n$, 当 $0<x<1$ 时都收斂, 写着 $A_n=\alpha_0+\cdots+\alpha_n$, $B_n=\beta_0+\cdots+\beta_n$; 假如数列 $B_n/A_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$不振动(就是說, 若不收斂于一个有限 l, 則必发散于 $+\infty$ 或 $-\infty$), 那末成立着等式

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\sum \beta_n x^n}{\sum \alpha_n x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{B_n}{A_n}.$$

事实上，当 $B_n/A_n\to l$ 时，$B_n=A_n l+A_n\varepsilon_n$，$\varepsilon_n\to 0$. 因此，

$$\frac{\sum \beta_n x^n}{\sum \alpha_n x^n}=\frac{\sum B_n x^n}{\sum A_n x^n}=l+\frac{\sum \varepsilon_n A_n x^n}{\sum A_n x^n}.$$

由于 $A_n>0$，所以上式当 $x\to 1-0$ 时，趋近于 l. 假如 $B_n/A_n\to+\infty$，那末对于 $G>0$，有 m 如下：当 $n>m$ 时 $B_n/A_n>G$. 从而

$$\frac{\sum B_n x^n}{\sum A_n x^n}>\frac{\sum\limits_{n=0}^{m} B_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n x^n}+G\frac{\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} A_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n x^n}.$$

由于 $A_n>A_{n-1}$，所以 $\sum A_n=\infty$，上式当 $x\to 1$ 时，趋向于 G; G 是任意的，此时等式也成立. 同样可証 $l=-\infty$ 的情况.

当 $\alpha>-1$ 时 $(\alpha)_n$ 是正的，从而 $\sum a_n x^n=\sum S_n^\alpha x^n/\sum(\alpha)_n x^n$. 因此，$\sigma_n^\alpha=S_n^\alpha/(\alpha)_n\to S$ 含有

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\lim_{x\to 1-0}\frac{\sum S_n^\alpha x^n}{\sum(\alpha)_n x^n}=\lim\frac{S_0^\alpha+\cdots+S_n^\alpha}{(\alpha)_0+\cdots+(\alpha)_n}=S.$$

証明完毕.

将 (A) 求和法看做一个透普利次的求和法，那末求和的核是

$$K_r(t)=\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t+r^2)}.$$

假如 $f(x\pm 0)$ 都存在，$h_r\to 0\,(r\to 1)$，那末，由求和的公式，

$$\begin{aligned}u(r,x+h_r)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_r(t-x-h_r)f(t)\,dt\\&=\frac{d}{\pi}\int_0^{h_r}K_r(t)\,dt+\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}+o(1).\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tan^{-1}(A\tan t)&=A\sec^2 t\,(1+A^2\tan^2 t)^{-1}\\&=A[1+(A^2-1)\sin^2 t]^{-1},\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^A\frac{dt}{1+B^2\sin^2 t}=\frac{1}{\sqrt{1+B^2}}\operatorname{arc\,tan}\left(\sqrt{1+B^2}\tan A\right).$$

从而

$$\frac{1}{2}\int_0^{h_r} K_r(t)dt = \arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{h_r}{2}\right).$$

当 $\frac{h_r}{1-r}\to a$ 时，我們見到

$$\lim_{r\to 1} u(r,\ x+h_r) = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$$

$$+\frac{1}{\pi}\{f(x+0)-f(x-0)\}\arctan a.$$

这就証明了下述定理的一部分.

定理 2 假如 $f(x\pm 0)$ 存在，

$$2f(x) = f(x+0)+f(x-0),\ d = f(x+0)-f(x-0),$$

那末当 $h_r/(1-r)\to a$ 时，成立着

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)f(t)}{1-2r\cos(t-x-h_r)+r^2}dt = f(x)+\frac{d}{\pi}\arctan a.$$

假如 $f(x+0)$ 存在，那末当 $\liminf\limits_{r\to 1}(1-r)^{-\frac{1}{2}}h_r>0$ 时，

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)f(t)dt}{1+r^2-2r\cos(t-x-h_r)} = f(x+0).$$

【証明】 当 $f(x-0)$ 也存在时，从 $\liminf(1-r)^{-\frac{1}{2}}h_r>0$，得到

$$\frac{h_r}{1-r}\to\infty,\ \arctan a = \frac{\pi}{2}.$$

从而得到所要的公式．現在証明定理的第二部分在 $f(x-0)$ 不存在的情况．不妨假設 $x=0$，$f(x+0)=0$．置

$$P(r,\ t) = \frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2},$$

$$J = \int_{-\delta}^{\delta} f(t)P(r,\ t-h_r)dt;$$

对于 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 和 $\rho(\varepsilon)$ 很小，当 $1-r\leqslant\rho(\varepsilon)$ 时，我們要証 $|J|<\varepsilon$．設 $h_r/\sqrt{1-r}$ 的下限是 $l(l>0)$．取 η 和 δ 足够小，使

$$(2l^{-2}+\pi)\eta<\varepsilon,\ |f(t)|<\eta(0<t\leqslant\delta),\ \int_{-\delta}^{0}|f|dt<\eta.$$

那末

$$|J|<\eta\left[\max_{-\delta<t<0} P(t,\, t-h_r)+\int_0^\delta P(r,\, t-h_r)dt\right]$$

$$<\eta\left[\frac{1-r}{4r\sin^2\frac{h_r}{2}}+\pi\right]<\eta\left(\frac{1}{l^2}+\pi\right)<\varepsilon.$$

由是，$\lim\limits_{r\to 1} J=0$. 証明完畢.

設 $a_0,\, b_0,\, a_1,\, b_1,\, \cdots$ 都是实数，并且当 $0\leqslant r<1$ 时，两个級数

$$u(r,\, x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)r^n,$$

$$v(r,\, x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)r^n$$

都收斂，那末在单位圓 $|z|<1\ (z=re^{ix})$ 上，$u(r,\, x)$ 和 $v(r,\, x)$ 都是調和函数，并且

$$u(r,\, x)+iv(r,\, x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-ib_n)z^n$$

是 z 的解析函数. 假如

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

是 f 的勒貝格-富理埃級数，那末等式

$$\lim_{r\to 1-0} u(r,\, x)=f(x)$$

在 $|z|=1$——卽 $0\leqslant x<2\pi$——上几乎到处成立. 由是，当 $f(x)$ 属于 $L(0,\, 2\pi)$ 时，存在着調和函数 $u(r,\, x)$ 适合于

$$u(1,\, x)\doteq f(x).$$

特別，当 $f(x)$ 具有連續性时，$u(1,\, x)=f(x)$ 处处成立；換句話說，圓上的狄里克莱問題，在特殊情况下，是可解的. 一般的狄里克莱問題，可以叙述如下：設 D 是以有长的若当閉曲綫 C 为境界的平面区域，$z\in C$，对于 C 上的单値函数 $f(z)$，探求 D 上的調和函数 $F(z)$，使当 $z\in C$ 时，$F(z)\doteq f(z)$. 上面所說，对于单位圓周上的連續函数，狄里克莱問題是有解的.

我們应該留意，尽管 $u(1,\, x)\in L(0,\, 2\pi)$，$v(1,\, x)$ 可以不属于

$L(0,2\pi)$，例如 $\sum\limits_{2}^{\infty}\cos nx/\log n$ 是勒貝格-富理埃級数，但是 $-\sum\limits_{2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\log n}$ 的和，在 $(0,\ 2\pi)$ 上不可以积分．事实上，它的逐项积分級数在 $x=0$ 并不收斂．因此，一般地說 $u(1,\ x)$ 和 $v(1,\ x)$ 的性质很不相同．但是，对于求和法来說，两者有相似之处．

定理 3 (i) 設 $\int_0^t|\psi_x(u)|du=o(t)$，則当 $\alpha>0$ 时，

$$\bar{\sigma}_n^\alpha(x)-\left(-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi}\frac{\psi_x(t)\,dt}{2\tan\frac{1}{2}t}\right)=o(1)\quad(\alpha>0).$$

(ii) 設 $\int_0^t\psi_x(u)du=o(t)$，$\eta=\arcsin(1-r)$，則当 $r\to1-0$ 时，

$$v(r,\ x)-\bar{f}(x,\ \eta)=o(1).$$

【証明】 (i) 首先注意 $\bar{\sigma}_n^\alpha(x)$ 的积分表达式 $-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\psi_x(t)\bar{K}_n^\alpha(t)dt$ 中的核是

$$\bar{K}_n^\alpha(t)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(\alpha-1)_{n-\nu}}{(\alpha)_n}\bar{D}_\nu(t)=\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(\alpha-1)_{n-\nu}}{(\alpha)_n}\frac{\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}.$$

由于 $\bar{D}_n(t)=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sin\nu t$ 的絕对值 $\leqslant n$，所以 $|\bar{K}_n^\alpha(t)|\leqslant n$．最后的和是

$$\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha-1)_\nu\cos\left(n-\nu+\frac{1}{2}\right)t$$
$$=\mathrm{Re}\left\{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}\left[(1-e^{-it})^{-\alpha}-\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(\alpha-1)_\nu e^{-i\nu t}\right]\right\},$$

它的絕对值是 $O(t^{-\alpha}+n^\alpha(nt)^{-1})$．从而，当 $nt\geqslant1$ 时，

$$H_n^\alpha(t)\equiv\bar{K}_n^\alpha(t)-\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}=O[t^{-1}(nt)^{-\alpha'}],$$

这里 $\alpha'=\min(\alpha,\ 1)$．由于

$$\bar{\sigma}_n^\alpha(x)-\bar{f}\left(x,\ \frac{a}{n}\right)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{a}{n}}\psi_x(t)\bar{K}_n^\alpha(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi}\psi_x(t)H_n^\alpha(t)\,dt$$
$$=o\left(n\int_0^{\frac{a}{n}}t\,dt\right)+O\left(n^{-\alpha'}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi}t^{-1-\alpha'}|\psi_x(t)|\,dt\right)$$

$$=o(1)+O(n^{-\alpha'})\left\{\left[t^{-1-\alpha'}\int_0^t |\psi_x(u)|du\right]_{\frac{a}{n}}^{\pi}+(1+\alpha')\int_{\frac{a}{n}}^{\pi} t^{-\alpha'-2}o(t)dt\right\}$$

$$=o(1)+O(n^{-\alpha'})\{O(1)+o(n^{\alpha'})\}=o(1),$$

所以(i)成立.

(ii) 写着

$$q(t)=\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2},\quad Q(r,t)=\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}-q(t),$$

那末

$$v(r,x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi_x(t)Q(r,t)dt,\quad Q(r,t)=\frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2};$$

$$v(r,x)-\tilde{f}(x,\eta)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\eta}\psi_x(t)Q(r,t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{\eta}^{\pi}\psi_x(t)q(t)dt$$

$$=o(\eta)O\left(\frac{1}{\eta}\right)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\eta}\int_0^t\psi_x(u)du\,\frac{\partial Q(r,t)}{\partial t}\,dt-\frac{1}{\pi}\int_{\eta}^{\pi}\int_0^t\psi_x\,du\,\frac{\partial q}{\partial t}\,dt,$$

事实上，$Q(r,0)=0$, $q(\pi)=0$,

$$\frac{1}{\pi}[-Q(r,\eta)+q(\eta)]\int_0^{\eta}\psi_x(u)du=O\left(\frac{1}{\eta}\right)o(\eta)=o(1).$$

由于

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=r\frac{(1+r^2)\cos t-2r}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^2}=O\left(\frac{1}{\eta^2}\right),$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}=-\frac{(1-r^2)\operatorname{cosec}^2\frac{t}{2}}{4(1-2r\cos t+r^2)}-r\frac{(1-r)^2(\cos t+1)}{(1-2r\cos t+r^2)^2}=O\left(\frac{\eta^2}{t^4}\right),$$

所以 $v(r,x)-\tilde{f}(x,\eta)$ 等于

$$o(1)+O\left(\frac{1}{\eta^2}\right)\int_0^{\eta}o(t)\,dt+\int_{\eta}^{\pi}o(t)\frac{\eta^2}{t^4}\,dt=o(1).$$

証明完毕.

系 在点 x, 假如主值积分 $\tilde{f}(x)$ 存在，那末

$$\tilde{\mathfrak{S}}[f;x]=\tilde{f}(x)(A).$$

【証明】 我們首先注意. $\tilde{f}(x)$ 的存在等价于

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{t}\frac{\psi_x(u)}{u}\,du=H(t)$$

的存在. 由是

$$\psi_1(t)=\int_0^t \psi(u)du=\int_0^t uH'(u)du=tH(t)-\int_0^t H(u)du=o(t).$$

由定理 3 的 (ii), 得到所要的結果. 証明完毕.

7. 富理埃級数的导級数

設 $f_1(t)$ 和 $\varphi_1(t)$ 分别是 $f(t)$ 和 $\varphi_x(t)$ 的积分, 那末

$$\frac{\varphi_1(t)}{t}=\frac{1}{2t}\int_0^t \{f(x+u)+f(x-u)-2S\}du$$

$$=\frac{1}{2t}\{f_1(x+t)-f_1(x-t)\}-S.$$

由是, $\varphi_1(t)=o(t)$ 等价于

$$Df_1(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f_1(x+t)-f_1(x-t)}{2t}=S.$$

这是 $f_1(x)$ 在 x 的对称导数. 由是, $Df_1(x)=S$ 的話, $\mathfrak{S}[f;x]=S\ (C,2)$, 这是已經提及过的. 这里的 $(C,\ 2)$ 不能改成 $(C,\ 1)$, 这也已經說过. 現在要問: 当 $1<\alpha<2$ 时, 下面的关系

$$\mathfrak{S}[f;\ x]=S\ (C,\ \alpha)$$

是否在条件 $Df_1(x)=S$ 下成立? 下面将回答这个問题. 一般地說, 富理埃級数 $\mathfrak{S}[f]$ 的导級数 $\mathfrak{S}'[f]$——将 $\mathfrak{S}[f]$ 逐項微分而得的級数——未必是富理埃級数. 但是, 成立着如下的事实:

定理 1 設 $f(x+2\pi)=f(x)\in L(0,\ 2\pi)$, 則当 $Df(x)$ 存在时, 成立着

$$\mathfrak{S}'[f;x]=Df(x)\ (A).$$

【証明】 我們要証: 当 $r\to 1-0$ 时,

$$\frac{\partial u(r,\ x)}{\partial x}=\sum_{n=1}^{\infty}n(-a_n\sin nx+b_n\cos nx)r^n\to Df(x).$$

这个級数等于

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\partial}{\partial t}P(r,\ t-x)dt=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\partial P(r,\ t)}{\partial t}dt.$$

写着

$$L(t)=-2\sin t\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{2r(1-r^2)\sin^2 t}{(1-2r\cos t+r^2)^2},$$

那末从上式得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\sin t}L(t)\,dt.$$

$L(t)$ 是一个费耶式的核；事实上，它具有如下的三个性质：

$$L(t)\geqslant 0,\quad L(t)\to 0\quad (r\to 1,\ 0<\delta\leqslant t\leqslant \pi),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi L(t)\,dt=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t\,P'(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi P(t)\cos t\,dt=r\to 1.$$

由于 $[f(x+t)-f(x-t)]/2\sin t\to Df(x)$，所以

$$\lim_{r\to 1}\frac{\partial u}{\partial x}=Df(x).$$

定理証毕. 这是法都(P. Fatou, 1906)的定理.

同样可証：当 $f^{(k)}(x)$ 存在时，k 次导級数适合

$$\mathfrak{S}^{(k)}[f;x]=f^{(k)}(x)\,(A).$$

当 $f'(x)$ 存在时，我們还要建立如下的定理.

定理 2 假如导数 $f'(x)$ 在 x_0 存在，那末，当 $z=re^{ix}$ 在单位圓 $|z|<1$ 內，沿着不与圓周 $|z|=1$ 相切的一条曲綫 L 趋近于点 e^{ix_0} 时，

$$\frac{\partial u(r,x)}{\partial x}\to f'(x_0).$$

【証明】 不妨假設 $x_0=0$, $f(x_0)=0$; L 的参数方程是

$$r=r(\lambda),\quad x=x(\lambda)\quad (0\leqslant\lambda\leqslant 1).$$

写着

$$\sin t\frac{\partial P(r,t-x)}{\partial t}=K_\lambda(t),\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_\lambda(t)\,dt=\theta(\lambda),$$

$$\frac{f(t)}{\sin t}-\theta(\lambda)f'(0)=-G(t),$$

我們見到

$$\frac{\partial u(r,x)}{\partial x}-\theta(\lambda)f'(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-\theta(\lambda)\sin t\,f'(0)]\frac{\partial}{\partial t}P(r,t-x)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(t)K_{\lambda}(t)dt=J_1+J_2+J_3,$$

这里

$$\pi J_1=\int_{-\delta}^{\delta}GK_{\lambda}dt,\quad \pi J_2=\int_{-\pi}^{-\delta}GK_{\lambda}dt,\quad \pi J_3=\int_{\delta}^{\pi}GK_{\lambda}dt.$$

在特殊的情况，$f(x)=\sin x$ 的話，我們得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\theta(\lambda)=r\cos\theta-\theta(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1-\theta]K_{\lambda}(t)dt,$$

或是 $\theta^2-2\theta+r\cos x=0$. 因此，当 $z\to1$ 时，$\theta(\lambda)\to1$. 从而取 δ 足够小，可使 $|G(t)|$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上小于 ε. 由是，从

$$|J_1|\leqslant\frac{1}{\pi}\varepsilon\int_{-\pi}^{\pi r}|K_{\lambda}(t)|dt<\frac{2\varepsilon}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}|\sin xP'(t)|dt+\int_0^{\pi}\sin t|P'(t)|dt\right\}$$

$$<\varepsilon[xP(r,0)+r]\qquad(\text{見定理 1 的証明})$$

得到 $|J_1|<\varepsilon\left(\frac{x}{1-r}+1\right)$. 当 z 沿着 L 趋近于 1 时，

$$J_1=O(\varepsilon);$$

$$\max_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}|K_{\lambda}(t)|=o(1).$$

从最后的結果，得到 $J_2=o(1)$, $J_3=o(1)$. 这就証明了

$$\frac{\partial u(r,x)}{\partial x}-\theta(\lambda)f'(0)\to0,$$

从而 $\frac{\partial u(r,x)}{\partial x}\to f'(0)$. 証明完毕.

我們称定理 2 中的"跑道" L 为斯多耳次(Stolz)路綫. 当 z 沿着某一斯多耳次路綫 L 接近于 $z_0=e^{ix_0}$ 时，假如极限等式

$$\lim_{z\to z_0,\ z\in L}\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=S$$

成立，我們称 $\sum a_n$ 可用斯多耳次-阿培耳求和法求和.

系 假如 $\frac{1}{t}\int_0^t f(x_0+u)du\to S$ $(t\to0)$，那末 $\mathfrak{S}[f;x_0]$ 可用斯多耳次-阿培耳求和法求和，和是 S.

【証明】 不妨假設 $x_0=0$. 設 f 的积分是 f_1，那末 $f_1'(0)=S$. 从而，当 z 沿着斯多耳次路綫趋近于 1 时，

$$\frac{\partial u_{f_1}(r,0)}{\partial x}=u_f(r,0)\to S.$$

現在回答本节开始所提出的問題于下.

定理 3 假如 $\dfrac{d}{dt}\int^x f(t)\,dt=f(x)$, 那末当 $\alpha>1$ 时,

$$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\,(C,\alpha),\quad \bar{\sigma}_n^\alpha(x)=\bar{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right)+o(1).$$

第一个結果包含在下面的定理中,第二个結果可以同样証明.

定理 4 假如 $DF(x)$ 在点 x 存在,那末当 $\alpha>1$ 时,

$$\mathfrak{S}'[F;x]=DF(x)\,(C,\alpha).$$

【証明】 当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是常数时,成立着

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\,\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cos k(x-t)\,dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x+t)\,\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cos kt\,dt.$$

因此,我們要証下面的等式:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x+t)\,\frac{d}{dt}K_n^\alpha(t)\,dt=DF(x)\quad(\alpha>1).$$

簡写 $L_n(t)=\sin t\dfrac{d}{dt}K_n^\alpha(t)$, 記上式左边的积分为 J_n, 那末

$$J_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{F(x+t)}{\sin t}\,L_n(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{F(x+t)-F(x-t)}{\sin t}\,L_n(t)\,dt,$$

这里 $L_n(-t)=L_n(t)$. 当 $F(t)\equiv\sin t$ 时, J_n 必須等于 1; 因此,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}L_n(t)\,dt=1.$$

若能証得

$$|L_n(t)|\leqslant n\quad\left(0\leqslant t\leqslant\frac{1}{n}\right),\qquad |L_n(t)|=O(n(nt)^{-\alpha})\quad\left(\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant\pi\right),$$

那末,写着 $(F(x+t)-F(x-t))/\sin t=2\,DF(x)+\varepsilon(t)$,

$$J_n=DF(x)+\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\varepsilon(t)\,L(t)\,dt$$
$$=DF(x)+\int_0^{\frac{1}{n}}o(n)\,dt+\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}|\varepsilon|\,O(n(nt)^{-\alpha})\,dt+o(1)$$
$$=DF(x)+o(1)+O(\varepsilon(\delta)).$$

末項当 δ 很小时，是很小的。由是可知 $J_n \to F(x)$，而定理証明完畢。

現在还要估計 $L_n(t)$。当 $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}$ 时，由于

$$\left|\sin t \frac{d}{dt} K_n^\alpha(t)\right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_1^n \nu < n;$$

所以 $|L_n(t)| < n$。

要証 $L_n(t) = O(n(nt)^{-\alpha}) \left(\frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \pi\right)$，首先注意：用阿培耳变换，容易証明恒等式

$$\sum_{\nu=0}^n (\alpha)_\nu z^\nu = \left[\sum_{\nu=0}^n (\alpha-1)_\nu z^\nu - (\alpha)_n z^{n+1}\right] \frac{1}{1-z}.$$

应用这个恒等式于 $2(\alpha)_n \sin \frac{t}{2} K_n^\alpha(t)$ 中的和，这是

$$z^{n+\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^n (\alpha-1)_\nu z^{-\nu} \quad (z = e^{it})$$

的虛部，所以

$$2(\alpha)_n \sin \frac{t}{2} K_n^\alpha(t) = \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{1-e^{-it}}\left[z^{n+\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^n (\alpha-2)_\nu z^{-\nu} - (\alpha-1)_n z^{-\frac{1}{2}}\right]\right\}.$$

再利用上面的恒等式，就得到

$$K_n^\alpha(t) = \operatorname{Im}\left\{\frac{z^{n+\frac{1}{2}}}{2(\alpha)_n \sin \frac{t}{2}}\left[\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\alpha} - \sum_{\nu=n+1}^\infty (\alpha-3)_\nu z^{-\nu}(1-z^{-1})^{-2}\right]\right\}$$
$$+ c_n \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^{-2},$$

这里 $c_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$；事实上，

$$(\alpha)_n c_n = -2 \sin \frac{t}{2} \operatorname{Im}\left\{\frac{(\alpha-2)_n z^{-\frac{1}{2}}}{(1-e^{-it})^2} + \frac{(\alpha-1)_n z^{-\frac{1}{2}}}{1-e^{-it}}\right\} = \frac{(\alpha-2)_n}{2} + (\alpha-1)_n.$$

写着

$$P = c_n \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^{-2},$$

$$Q = \sin\left\{\left(n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right\} \Big/ (\alpha)_n \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^{1+\alpha},$$

$$K_n^\alpha(t) = P + Q + R,$$

那末,我們見到当 $nt\geqslant 1$ 时,

$$\frac{\partial K_n^\alpha(t)}{\partial t}=O(n^{-1}t^{-3})+O(n^{1-\alpha}t^{-1-\alpha})+\frac{\partial R}{\partial t},$$

这里

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{1}{(\alpha)_n}\frac{d}{dt}\operatorname{Im}(a(t)b(t)),$$

$$a(t)=z^{n+\frac{3}{2}}\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{-3},$$

$$b(t)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(\alpha-3)_\nu z^{-\nu}.$$

我們不妨假設 $1<\alpha<2$, 从而 $0<-\nu(\alpha-3)_\nu<-(\nu-1)(\alpha-3)_{\nu-1}$,

$$|b'(t)|=\left|\sum_{n+1}^{\infty}-(\alpha-3)_\nu i\nu z^{-\nu}\right|\leqslant(n+1)(\alpha-3)_{n+1}2t^{-1},$$

$$|b(t)|\leqslant(\alpha-3)_{n+1}2t^{-1}.$$

因此,当 $1\leqslant nt\leqslant\pi$ 时,

$$\frac{\partial R}{\partial t}=O(n^{-2}t^{-4})+O(n^{-3}t^{-5})=O(n^{-2}t^{-4}),$$

$$\frac{\partial K_n^\alpha(t)}{\partial t}=O(n^{1-\alpha}t^{-1-\alpha})+O(n^{-2}t^{-4})=O(n^{1-\alpha}t^{-1-\alpha}),$$

$$L_n(t)=\sin t\frac{dK_n^\alpha}{dt}=O(n^{1-\alpha}t^{-\alpha})\quad(1<\alpha<2).$$

定理証明完毕.

費耶的核以及普阿松的核,都是正的,从这个性质可以引出一系列的結果. 下面的議論是从正值函数的效用发展出来的. 当 $0\leqslant t\leqslant\pi$, $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时,

$$\cos(x-t)-\cos(x+t)=2\sin t\sin x\geqslant 0,$$

所以 $p(r,x)\equiv P(r,x-t)-P(r,x+t)\geqslant 0$. 假如 $f(x)$ 是一奇函数, $f(x)\geqslant 0\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$, 那末从 f 的普阿松积分

$$u_f(r,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)P(r,x-t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)p(r,x-t)dx$$

得到

$$\min_{0<x<\pi} f(x)\cdot u_{\operatorname{sgn} x}(r, x) < u(r, x) < \max_{0<x<\pi} f(x)\cdot u_{\operatorname{sgn} x}(r, x).$$

这个結果被費耶(1933, 倫敦数学会期刊 J. L. M. S. 8)改进成:

$$\sigma_n^3(f; x) \geqslant \min_{0<x<\pi} f(x)\sigma_n^3(\operatorname{sgn} x, x),$$

$$\sigma_n^3(f; x) \leqslant \max_{0<x<\pi} f(x)\sigma_n^3(\operatorname{sgn} x, x).$$

事实上,由于 $f(-x)=-f(x)$, 所以

$$\sigma_n^3(f; x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n^3(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n^3(t-x)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\{K_n^3(t-x)-K_n^3(t+x)\}\,dt.$$

因此,假如我們証得 $K_n^3(t)$ $(0<t<\pi)$ 是 t 的减少函数,那末上記的两个不等式就被証明了. $\frac{d}{dt}K_n^3(t)$ 是

$$\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots$$

的导級数的蔡查罗三次平均 $\frac{S_n^3(t)}{(3)_n}$. 因此,我們要証

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^3(t)r^n=(1-r)^{-4}\sum_{n=0}^{\infty} -n\sin nt\cdot r^n$$

$$=\frac{1}{(1-r)^3}\frac{d}{dt}\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t+r^2)}$$

$$=\left[\frac{1-r^2}{2(1-r)^2(1-2r\cos t+r^2)}\right]^2\frac{-4r\sin t}{1-r^2}$$

中的系数 $S_n^3(t)$ 在 $(0, \pi)$ 上取負值. 由于

$$\frac{1-r^2}{(1-r)^2\cdot 2(1-2r\cos t+r^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 r^n,$$

所以

$$S_n^3(t)\leqslant 0 \quad (0\leqslant t\leqslant\pi).$$

这个証明是导級数的一个应用,我們把費耶的定理記录于下.

定理 5 設 $f(x)\equiv f(x+2\pi)$ 是一个奇函数,

$$0\leqslant m=\min_{0<x<\pi} f(x),\quad M=\max_{0<x<\pi} f(x).$$

那末

$$m\sigma_n^3(\operatorname{sgn} x, x) \leqslant \sigma_n^3(f; x) \leqslant M\sigma_n^3(\operatorname{sgn} x, x).$$

8. 在勒貝格点. 凸性数列

設 $f(x) \in C_{2\pi}$, 在点 x_0, 当

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt = 0$$

时, $\mathfrak{S}[f; x_0] = f(x_0)\ (C, 1)$. 这是勒貝格的定理, 因此, 我們称满足上記等式的点 x_0, 为 $f(x)$ 的一个**勒貝格点**. 在勒貝格点, 还可以建立更一般的求和定理.

定理 1 (叶非莫夫,苏联科学院通报,数学之輯 24, 1960) 設

$$u_n(x) \equiv u_n(f; x, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t-x) dt,$$

$$K_n(t) = \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kt, \quad \lambda_0^{(n)} = 1, \ \lambda_{n+1}^{(n)} = 0,$$

那末当

(i) $\lambda_k^{(n)} \to 1 \quad (n \to \infty, k = 1, 2, \cdots)$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1} = O(1)$,

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k+1)}{n+1} |\Delta^2 \lambda_k^{(n)}| = O(1)$

时, 在 f 的任一勒貝格点 x, 成立着 $u_n(x) \to f(x)$.

【証明】[*] 簡写 $\Delta_k = \Delta\lambda_k^{(n)}$, $\Delta_k^2 = \Delta_k - \Delta_{k+1}$; 通过阿培耳变换, 容易建立下面两个等式:

1° $$\lambda_k^{(n)} = 1 - k\Delta_k - \sum_{\nu=0}^{k-1} (\nu+1) \Delta_\nu^2,$$

2° $$\lambda_k^{(n)} = (n-k+1)\Delta_k - \sum_{\nu=k}^{n-1} (n-\nu) \Delta_\nu^2.$$

从 1° 和 2° 消去 Δ_k, 就得到: 当 $k \geqslant 1$ 时,

---

[*] 証明的难处是在指出 $\Phi'(t)|K_n(t)|$ 上的积分是 $o(1)$, 其余比較直捷. 这个难处, 下面将添入条件(iv)来克服. 因此这里的証明, 只建立了添入条件(iv)的定理 1.

$$\lambda_k^{(n)}=\frac{n-k+1}{n+1}-\frac{n-k+1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{k-1}(1+\nu)\Delta_\nu^2-\frac{k}{n+1}\sum_{\nu=k}^{n-1}(n-\nu)\Delta_\nu^2.$$

由是，結合(iii)，

$$3^\circ\qquad |\lambda_k^{(n)}|<1+\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(\nu+1)(n-\nu+1)}{n+1}|\Delta_\nu^2|=O(1).$$

再从 1° 和 2° 得到

$$k|\Delta_k|\leqslant 1+|\lambda_k^{(n)}|+\sum_{\nu=0}^{k-1}(1+\nu)|\Delta_\nu^2|,$$

$$(n-k+1)|\Delta_k|\leqslant|\lambda_k^{(n)}|+\sum_{\nu=k}^{n-1}(n-\nu)|\Delta_\nu^2|.$$

写着 $n'=\left[\frac{n}{2}\right]+1$，我們見到—— $\sum_{i=\nu}^{\mu}\Delta_i^2=\Delta_\nu-\Delta_{\mu+1}$ ——

$$\begin{aligned}
\sigma_n\equiv\sum_{\nu=0}^{n}|\Delta_\nu|&=\sum_{\nu=0}^{n'-1}|\Delta_\nu|+\sum_{\nu=n'}^{n}|\Delta_\nu|\\
&=\sum_{\nu=0}^{n'-1}\left|\sum_{i=\nu}^{n'-1}\Delta_i^2+\Delta_{n'}\right|+\sum_{\nu=n'}^{n}\left|\Delta_{n'}-\sum_{i=n'}^{\nu}\Delta_i^2\right|\\
&\leqslant\sum_{\nu=0}^{n'-1}\sum_{i=\nu}^{n'-1}|\Delta_i^2|+n'|\Delta_{n'}|+(n-n'+1)|\Delta_{n'}|+\sum_{\nu=n'}^{n}\sum_{i=n'}^{\nu}|\Delta_i^2|\\
&=\sum_{i=0}^{n'-1}(i+1)|\Delta_i^2|+(n+1)|\Delta_{n'}|+\sum_{i=n'}^{n-1}(n-i)|\Delta_i^2|\\
&\leqslant 2\sum_{i=0}^{n'-1}\frac{(i+1)(n-i)}{n+1}|\Delta_i^2|+(n+1)|\Delta_{n'}|\\
&\qquad\qquad+2\sum_{i=n'}^{n-1}\frac{(i+1)(n-i)}{n+1}|\Delta_i^2|\\
&=2\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(i+1)(n-i)}{n+1}|\Delta_i^2|+(n+1)|\Delta_{n'}|.
\end{aligned}$$

由于 $(n+1)|\Delta_{n'}|<2n'|\Delta_{n'}|=O(1)$，所以 $\sigma_n=O(1)$.

現在証明：当 $0<\delta\leqslant\pi$ 时，

$$4^\circ\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\delta K_n(t)dt=1.$$

实际上，这个积分等于

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\left(\frac{\delta}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\frac{\sin k\delta}{k}\right)&=1-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi-\delta}{2}-\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k^{(n)}\frac{\sin k\delta}{k}\right]\\
&=1-\frac{2}{\pi}\left\{\sum_{k=1}^{n+k}(1-\lambda_k^{(n)})\frac{\sin k\delta}{k}+\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{\sin k\delta}{k}\right\}.
\end{aligned}$$

記最后的級数为 $\gamma_{n+2}=\gamma_{n+2}(\delta)$，那末

$$\sum_{k=1}^{n+1}(1-\lambda_k^{(n)})\frac{\sin k\delta}{k}=\sum_{k=1}^{n+1}(1-\lambda_k^{(n)})(\gamma_k-\gamma_{k+1})$$

$$=\Delta_0\gamma_1+\Delta_1\gamma_2+\cdots+\Delta_n\gamma_{n+1}-\gamma_{n+2}.$$

从而

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\delta K_n(t)\,dt=1-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\Delta_k\gamma_{k+1}(\delta).$$

从(i)得到 $\Delta_k\to0$，又从 $\sigma_n=O(1)$ 得到

$$\sum_{k=m+1}^{n}\Delta_k\gamma_k(\delta)=O\left(\max_{k>m}|\gamma_k(\delta)|\right).$$

所以，当 $n\to\infty$ 时，$\sum\limits_{k=0}^{n}\Delta_k\gamma_{k+1}(\delta)=O\left(\max\limits_{k>m}|\gamma_k(\delta)|\right)$。預先取 m 适当大，$\max\limits_{k>m}|\gamma_k(\delta)|$ 就很小，从而得到 4°.

設 x_0 是 f 的一个勒貝格点，我們要証

$$u_n(f;x_0,\lambda)-f(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x_0+t)-f(x_0)]K_n(t)\,dt=o(1).$$

不妨假設 $x_0=0$；这样，我們要从

$$\Phi(t)=\int_0^t|f(u)-f(0)|\,du=o(|t|)$$

导出

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left[\frac{f(t)+f(-t)}{2}-f(0)\right]K_n(t)\,dt=o(1).$$

或是从 $\Phi(t)=o(t)\ (t>0)$ 导出 $\int_0^\pi(f(t)-f(0))K_n(t)\,dt=o(1)$ 就够了.

狄里克莱核和費耶核分别是

$$D_\nu(t)=\frac{\sin\frac{2\nu+1}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\quad\text{和}\quad F_\nu(t)=\frac{\sin^2\frac{\nu+1}{2}t}{2(\nu+1)\sin^2\frac{t}{2}}.$$

注意着 $\Delta_{n+1}=0$，我們能写

$$K_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu^{(n)}\cos\nu t=\sum_{\nu=0}^{n}\Delta_\nu D_\nu(t)=\sum_{\nu=0}^{n}\Delta_\nu^2(1+\nu)F_\nu(t).$$

从而

$$|K_n(f;0,\lambda)-f(0)|\leqslant\frac{2}{\pi}[J_1+J_2],$$

这里

$$J_1=\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi'(t)|K_n(t)|dt,\quad J_2=\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\Phi'(t)|K_n(t)|dt.$$

我們見到，

$$J_1\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi'(t)|K_n(t)|dt\leqslant n\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_0^n\frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1}=o(1).$$

設 $n'=\left[\frac{n}{2}\right]$，則 $K_n(t)$ 等于 $K_{n1}(t)+K_{n2}(t)$，这里

$$K_{n1}(t)=\sum_{\nu=0}^{n'}|\Delta_\nu^2|(1+\nu)F_\nu(t),\ K_{n2}=\sum_{n'+1}^{n}|\Delta_\nu^2|(1+\nu)F_\nu(t).$$

由于 $F_\nu(t)\leqslant\max[\nu+1,(\nu+1)^{-1}t^{-2}]$ 的常数倍，并且

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\Phi'(t)\max(\nu+1,(\nu+1)^{-1}t^{-2})dt$$

$$=(\nu+1)\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\nu+1}}\Phi'(t)dt+(\nu+1)^{-1}\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\pi}\Phi'(t)\frac{dt}{t^2}$$

$$\leqslant(\nu+1)\Phi(\nu+1)+\frac{1}{\nu+1}\left[\Phi(t)t^{-2}+2\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{t}\Phi(t)t^{-3}dt\right]_{\frac{1}{\nu+1}}^{\pi}$$

$$<c(\nu+1)\Phi\left(\frac{1}{\nu+1}\right),$$

这里 $[\Phi(t)t^{-1}]'<0$ 用在 $\int^t\Phi(t)t^{-3}dt$ 的估計；所以从

$$|K_{n1}(t)|<\frac{n+1}{n-n'}\sum_{\nu=0}^{n'}\frac{(1+\nu)(n-\nu)}{n+1}\Delta_\nu^2\cdot F_\nu(t)$$

$$\leqslant O(1)\sum_{\nu=0}^{n'}\frac{(1+\nu)(n-\nu)}{n+1}\Delta_\nu^2\max(\nu+1,(\nu+1)^{-1}t^{-2})$$

得到

$$J_{21}\equiv\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\Phi'(t)|K_{n1}(t)|dt\leqslant c\sum_{\nu=0}^{n'}\frac{(1+\nu)(n-\nu)}{n+1}|\Delta_\nu^2|(\nu+1)\Phi\left(\frac{1}{\nu+1}\right),$$

c 是常数．設 $\varepsilon>0$，当 $\nu>\nu_0$ 时，$(\nu+1)\Phi\left(\frac{1}{\nu+1}\right)<\varepsilon$；那末，从 (i)，(ii)得到

$$\limsup_{n\to\infty} J_{21} \leqslant c\varepsilon \sum_{\nu=\nu_0}^{n'} \frac{(1+\nu)(n-\nu)}{n+1} |\Delta_\nu^2| \leqslant c'\varepsilon,$$

c' 也是常数.

現在引入条件

(iv)

$$\sum_{\nu=n'}^{n} \nu |\Delta_\nu^2| = O(1)$$

对于

$$J_{22} \equiv \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \Phi'(t) \sum_{\nu=n'+1}^{n} (1+\nu) \Delta_\nu^2 F_\nu(t) dt$$

中的积分,我們見到

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \Phi'(t) F_\nu(t) dt = o(1) \quad (n' < \nu \leqslant n).$$

从而

$$J_{22} = o(1) \sum_{\nu=n'+1}^{n} (1+\nu) \Delta_\nu^2 = O(1).$$

总結起来, $J_1+J_2=J_1+J_{21}+J_{22}=o(1)$. 因此

$$u_n(f;\, x_0,\, \lambda) - f(x_0) = o(1).$$

定理証毕.

取 $\lambda_k^{(n)} = \dfrac{(\alpha)_{n-k}}{(\alpha)_n}$, 我們容易証明:当 $\alpha>0$ 时,(i),(ii),(iii),(iv) 都成立. 因此在 f 的任一勒貝格点 x, 成立着

$$\sigma_n^\alpha(f;\, x) \to f(x).$$

定理 2 設 $\Delta^2\lambda_n \geqslant 0$, $\lambda_n \to 0$. 对于 $S_n = u_0 + \cdots + u_n$, 假如极限 $\lim(\lambda_n S_n)$ 存在,那末当 $S_0+S_1+\cdots+S_n=O(n)$时,級数 $\sum u_n\lambda_n$ 收斂.

【証明】 从 $\Delta^2\lambda_n \geqslant 0$, 知道 $\{\Delta\lambda_n\}$ 是一个减少数列. 我們要証这是一个正值数列. 假如不然,那末存在 $\Delta\lambda_n < 0$; 从

$$\Delta\lambda_n + \Delta\lambda_{n+1} + \cdots + \Delta\lambda_{n+p} = \lambda_n - \lambda_{n+p+1},$$

得到 $\lambda_n < (n+p-n+1)\Delta\lambda_n + \lambda_{n+p+1} \to -\infty\,(p\to\infty)$. 这是不可能的. 由是可知 $\sum \Delta\lambda_n$ 是收斂的,其和等于 λ_0. 由于

$$\Delta\lambda_0 \geqslant \Delta\lambda_1 \geqslant \cdots,$$

所以 $n\Delta\lambda_n=o(1)$*). 利用阿培耳变换，我們見到

$$\sum_{\nu=0}^{n}\Delta\lambda_\nu=\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)\Delta^2\lambda_\nu+(n+1)\Delta\lambda_n,$$

末項是 $o(1)$，所以 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)\Delta^2\lambda_\nu=\lambda_0$. 再由阿培耳变换，

$$\sum_{\nu=0}^{n}u_\nu\lambda_\nu=\sum_{\nu=0}^{n-1}S_\nu\Delta\lambda_\nu+S_n\lambda_n$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n-2}(S_0+\cdots+S_\nu)\Delta^2\lambda_\nu+(S_0+\cdots+S_{n-1})\Delta\lambda_{n-1}+S_n\lambda_n.$$

末項具有极限 l，中項是 $O(n\lambda_n)=o(1)$，首項 $\sum\limits_{\nu=0}^{n-2}O(\nu)\Delta^2\lambda_\nu$ 是一个收斂級数. 因此 $\sum u_\nu\lambda_\nu$ 是一收斂級数. 証明完毕.

系 1 設 $f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，則級数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{\log n}$$

几乎处处收斂(哈戴，1913).

【証明】 設 $\mathfrak{S}[f]$的部分和是 $S_n(x)$，$\lambda_n=\dfrac{1}{\log n}$，那末 $\Delta^2\lambda_n\geqslant 0$，我們已經知道

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)/\log n=0$$

几乎到处成立，并且 $\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\doteq f(x)$. 由定理 2，所設的級数概收斂. 証明完毕.

系 2 設 $\mathfrak{S}[f]$ 的 $\tilde{\mathfrak{S}}[f]$ 是 $\sum(-a_n\sin nx+b_n\cos nx)$，那末

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-a_n\sin nx+b_n\cos nx}{\log n}$$

---

*) 这是奥立維埃 (Olivier, 1827)的定理：設 $a_n\geqslant a_{n+1}\geqslant 0$，則当 $\sum a_n<\infty$ 时，$\lim S_n=\lim(S_n-na_n)$；这里 $S_n=a_1+\cdots+a_n$. 事实上，S_n 和 $S_n-na_n=\sum\limits_{\nu=1}^{n}(a_\nu-a_n)$ 都是单調增加，所以从——$n'=\left[\frac{n}{2}\right]$ 的話——

$$S_n\geqslant S_n-na_n\geqslant S_{n'}-n'a_{n'}\geqslant S_{n'}$$

得到所要的結果.

概收斂[潑賴斯耐(Plessner), 1923].

【証明】 $\overline{\mathfrak{S}}[f]$ 的部分和 $\overline{S}_n(x)$ 以及部分和的算术平均 $\bar{\sigma}_n(x)$, 当

$$\int_0^t |\psi_x(u)|du = o(t)$$

时,分别满足

$$\overline{S}_n(x) = o(\log n),$$

$$\bar{\sigma}_n(x) - \bar{f}\left(x, \frac{a}{n}\right) = o(1) \quad (a>0).$$

由于 $\int_0^t |\psi_x|du = o(t)$ 几乎处处成立,所以上記两等式几乎到处成立.因此,假如我們能証

$$\lim_{h\to+0} \bar{f}(x, h) = \bar{f}(x)$$

几乎处处成立,那末 $\bar{\sigma}_n(x)$ 几乎处处是有界. 从而除一个零集而外,对于同一点 x, 成立着

$$\frac{\overline{S}_n(x)}{\log n} \to 0, \quad \bar{\sigma}_n(x) = O(1).$$

由定理 2, 級数 $\sum(-a_n \sin nx + b_n \cos nx)/\log n$ 概收斂. 我們还要証明

引理 当 $f(x) \in L(0, 2\pi)$ 时,极限

$$\lim_{h\to+0} -\frac{1}{\pi}\int_h^\pi \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\,dt$$

几乎处处存在.

首先証明: 設 $z = re^{ix}$, 級数 $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n z^n$ 在单位圆 $|z|<1$ 上表示一个有界函数 $g(z)$. 假如 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 中无零点,那末极限函数

$$l(x) = \lim_{r\to 1-0} g(re^{ix})$$

在 $|z|=1$ 上几乎处处不等于 0.

由于 $g(z)$ 的有界性, 当 $|z|=1$ 时, $\operatorname{Re} g(z)$ 和 $\operatorname{Im} g(z)$ 都是有界函数的富理埃級数. $|g(z)|<1$ 的話, $\log g(re^{ix})$ 的实部 $\log|g(re^{ix})|<0$, 从而当 $r\to 1-0$ 时,調和函数 $\log|g(re^{ix})|$ (普阿松积分) 几乎处处有极限. 因此, $l(x)$ 几乎处处不等于 0.

其次証明 $\mathfrak{S}[f]$ 几乎处处可用阿培耳求和法求和. 我們不妨假設 $f(x)\geqslant 0$ 来証明. 設 $f(r, x)$ 是 f 的普阿松积分, $\bar{f}(r, x)$ 是和 $f(r, x)$ 共軛的普阿松积分, 从而 $f(r, x)+i\bar{f}(r, x)$ 的一切值落在虛数軸的右方,

$$F(z)=\frac{1}{1+f(r,x)+i\bar{f}(r,x)} \quad (z=re^{ix},\ 0<r<1)$$

的絕对值小于1. 因此, 当 $r\to 1-0$ 时, 极限 $\lim F(re^{ix})$ 几乎处处存在. 所以 $\lim \bar{f}(r, x)$ 几乎处处存在而为有限数 $\bar{f}(x)$, $\bar{f}(x)$ 就是引理中的主值积分. 証明完毕.

数列 $\lambda_n=\dfrac{1}{\sqrt{\log n}}$ $(n>1)$ 虽具有凸性, 就是說, $\Delta^2\lambda_n\geqslant 0$, 但是对于 $\mathfrak{S}[f]$, 一般地来說, 极限 $\lim \lambda_n S_n(x)$ 是不存在的. 假如 $f(x)\in L^2(0, 2\pi)$, 那末

$$\sum_{n=2}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)/\sqrt{\log n}$$

以及

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-a_n\sin nx+b_n\cos nx)/\sqrt{\log n}$$

都是概收斂的.

定理 3[*] 当級数 $\sum\limits_{2}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\log n$ 收斂时, 三角級数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

几乎处处收斂.

詳見第三章 §3 的定理 8.

9. 从有界变差函数产生的三角級数

設 $F(x+2\pi)=F(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上是有界变差, 我們在第一章 §1 中, 定义富理埃-斯蒂耳吉司級数 $\mathfrak{S}[dF]$:

---

[*] 这是濮羅斯耐(1926)的定理. 濮羅斯耐从德国回到苏联后, 故称 Плеснер.

$$dF(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

这里

$$\begin{matrix}a_n\\b_n\end{matrix}=\frac{1}{\pi}\int\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}nx\,dF(x).$$

由于$\mathfrak{S}[dF]$是$\mathfrak{S}[F]$的导級数，所以当$\alpha>1$时，$\mathfrak{S}[dF]$可用(C,α)求和法求和．哈戴証明了更深刻的

定理 1 設$F(x)$是有界变差的周期函数，则当$\alpha>0$时，几乎处处成立着

$$\mathfrak{S}(dF)=F'(x)\,(C,\alpha).$$

【証明】 設函数

$$F(x+t)-F(x-t)-2tF'(x)$$

与

$$F(x+t)+F(x-t)-2F(x)$$

在区間$0\leqslant t\leqslant h$上的全变差分别是$A_x(h)$与$B_x(h)$．我們将証除x的一个零集外，成立着$A_x(h)=o(h)$，$B_x(h)=o(h)$．

設$v(x)$是有界变差函数$g(x)$的全变差函数，那末在有导数$g'(x)$的x，成立着$|g'(x)|=v'(x)$．由是，設r是一常数，$F(t)-rt$的全变差函数为$v_r(t)$，那末对于几乎一切x，成立着

$$v_r'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h|d[F(x\pm t)-r(x\pm t)]|$$
$$=|F'(x)-r|.$$

設r是有理数，上式不成立的一切x的全体是E_r，那末$E=\sum E_r$成一零集．当$x\in E$时，对于$\varepsilon>0$，取有理数r适合于

$$|F'(x)-r|<\varepsilon,$$

那末

$$\int_0^h|d\{F(x\pm t)-(x\pm t)F'(x)\}|$$
$$<\int_0^h|d\{F(x\pm t)-(x\pm t)r\}|+\varepsilon h=O(\varepsilon h),$$

从而$A_x(h)=o(h)$．由于

$$|d[F(x+t)+F(x-t)]|$$
$$\leqslant|d[F(x+t)-tF'(x)]|+|d[F(x-t)+tF'(x)]|,$$

所以 $B_x(h)=o(h)$.

写着 $F_x(t)=F(x+t)-F(x-t)-2tF'(x)$，由于 $\mathfrak{S}[dF]$ 的蔡查罗平均数

$$\sigma_n^\alpha(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n^\alpha(x-t)dF(t)$$

可以改写成 $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi K_n^\alpha(t)d[F(x+t)-F(x-t)]$，所以

$$\sigma_n^\alpha(x)-F'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi K_n^\alpha(t)dF_x(t).$$

现在，除开 x 的一个零集，

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}|K_n^\alpha(t)dF_x(t)|\leqslant\frac{2n}{\pi}A_x\left(\frac{1}{n}\right)=o(1).$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}|K_n^\alpha(t)dF_x(t)|$$

$$\leqslant c\Big[A_x(t)n^{-\alpha}t^{-1-\alpha}\Big]_{\frac{1}{n}}^{\pi}+c'n^{-\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}A_x(t)t^{-2-\alpha}dt=o(1).$$

所以 $\sigma_n^\alpha(x)\ (n\to\infty)$ 几乎处处接近于 $F'(x)$. 定理証毕.

定理 2 設 $\overline{\sigma_n^\alpha}(x)$ 是 $\mathfrak{S}[dF]$ 的共軛級数的蔡查罗平均数，那末当 $\alpha>0$ 时，几乎处处成立着

$$\overline{\sigma_n^\alpha}(x)-\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{F(x+t)+F(x-t)-2F(x)}{4\sin^2\frac{t}{2}}dt\right\}=o(1).$$

【証明】 簡写

$$F(x+t)+F(x-t)-2F(x)=G_x(t),\quad \overline{K}_n^\alpha(t)=\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}+H_n^\alpha(t),$$

那末当 $0<\alpha<1$ 时，$|H_n^\alpha(t)|<An^{-\alpha}t^{-1-\alpha}$. 从而

$$\overline{\sigma}_n^\alpha(x)-\left(-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{dG_x(t)}{2\tan\frac{t}{2}}\right)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\overline{K}_n^\alpha(t)dG_x(t)-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}H_n^\alpha(t)dG_x(t).$$

从定理 1 的証明，右方是 $o(1)$. 施行分部积分法于左方的积分，我們得到所要的結果. 定理証毕.

对于三角級数 $\sum(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$，假如有数列 $\{\lambda_n\}$ 能使級数

$$\sum\lambda_n(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$$

几乎处处收斂，那末我們称 $\{\lambda_n\}$ 是 $\sum(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$ 的一个**收斂因子列**.

定理 3 $\left\{\dfrac{1}{\log n}\right\}$ $(n=2,3,\cdots)$ 是 $\mathfrak{S}[dF]$ 和 $\bar{\mathfrak{S}}[dF]$ 的收斂因子叙列.

【証明】 我們利用前节定理 2 来証明. 因此，只要証明

$$\sigma_n^0(x)-F(x)=o(\log n)$$

和 $\bar\sigma_n(x)=o(\log n)$；事实上，$-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi\frac{G_x(t)}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt$ 几乎处处存在. 现在

$$\sigma_n^0(x)-F(x)=o(1)+O\left(\int_{\frac{1}{n}}^\pi A_x(t)t^{-2}dt\right)$$

$$=O\left[\int_{\frac{1}{n}}^\pi o(t^{-1})dt\right]=o(\log n).$$

同样可以討論 $\bar{\mathfrak{S}}[dF]$. 定理証毕.

10. 脑登楊求和定理中的連續性条件

写着

$$\varphi_k(t)=\int_0^t\varphi_{k-1}(u)du\quad(k=1,2,\cdots),$$

$$\varphi_0(t)=\varphi(t)=\varphi_x(t),\ \Delta_\eta^n\varphi(t)=\sum_{\nu=0}^n(-1)^{n+\nu}\binom{n}{\nu}\varphi(t+\nu\eta)\quad(\eta>0),$$

$$g_x(n,\alpha,\eta,k)=\eta^\alpha\int_{k\eta}^\pi\frac{|\Delta_\eta^n\varphi(t)|}{t^{1+\alpha}}dt.$$

下面两个定理是已知的：

狄尼定理：$\lim\limits_{\eta\to0}g_x(0,0,\eta,0)$ 的存在含有 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$.

日尔斤定理：当 $\varphi_1(t)=o(t)$ 时，

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{\eta\to0}g_x(1,0,\eta,k)=0$$

含有 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)$.

我們称 $\lim\limits_{k\to\infty}\limsup\limits_{\eta\to 0} g_x(n,\alpha,\eta,k)=0$ 为 α **級的日尔斤条件**. 日尔斤于1930年在数学季刊(Q. J. M.)上証得如下的命題.

定理 1 在 α 級的日尔斤条件下,任一(平均)連續性条件

$$\varphi_r(t)=o(t^r) \quad (r\text{: 正整数})$$

含有 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\,(C,\alpha)$, 这里 $\alpha>-1$; 并且必然地成立着

$$\varphi_1(t)=O(t),\ \varphi_2(t)=o(t^2).$$

当 $-1<\alpha\leqslant 0$ 时,上記两个关系改进成 $\varphi_1(t)=o(t)$.

【証明】 我們要証 $\sigma_n^\alpha(x)-f(x)=o(1)$. 置 $y=\dfrac{2\pi}{2n+\alpha+1}$, 写着

$$\pi[\sigma_n^\alpha(x)-f(x)]=\int_0^{(k+\nu)y}+\int_{(k+\nu)y}^{\pi+(\nu-m)y}+\int_{\pi+(\nu-m)y}^{\pi}\varphi_x(t)K_n^\alpha(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}(J_1+J_2+J_3),$$

$$2^{2m}=\sum_{\nu=0}^{2m}\binom{2m}{\nu},\ K_n^\alpha(t)=Q_n^\alpha(t)+R_n^\alpha(t),\ J_2=J_2'+J_2'',$$

$$J_1=\sum_{\nu=0}^{2m}\binom{2m}{\nu}\int_0^{(k+\nu)y}\varphi(t)K_n^\alpha(t)\,dt,$$

$$J_2'=\sum_{\nu=0}^{2m}\binom{2m}{\nu}\int_{(k+\nu)y}^{\pi+(\nu-m)y}\varphi(t)R_n^\alpha(t)\,dt,$$

$$J_2''=\sum_{\nu=0}^{2m}\binom{2m}{\nu}\int_{(k+\nu)y}^{\pi+(\nu-m)y}\varphi(t)Q_n^\alpha(t)\,dt,$$

$$J_3=\sum_{\nu=0}^{2m}\binom{2m}{\nu}\int_{\pi+(\nu-m)y}^{\pi}\varphi(t)K_n^\alpha(t)\,dt.$$

先証 $J_3=0$. 我們見到:

$$\sum_{\nu=m}^{2m}\binom{2m}{\nu}\int_{\pi+(\nu-m)y}^{\pi}\varphi(t)K_n^\alpha(t)\,dt=\sum_{\nu=m}^{2m}\binom{2m}{2m-\nu}\int_{\pi+(\nu-m)y}^{\pi}\varphi(t)K_n^\alpha(t)\,dt$$

$$=\sum_{\mu=0}^{m-1}\binom{2m}{\mu}\int_{\pi+(m-\mu)y}^{\pi}\varphi(t)K_n^\alpha(t)\,dt.$$

由于 $K_n^\alpha(t)\varphi(t)=K_n^\alpha(-t)\varphi(-t)$, 所以 $J_3=0$.

要估計 J_1 和 J_2, 我們需要如下的結果: 設 $-1<\alpha\leqslant 1$, 則

(i) $\quad |K_n^\alpha(t)|\leqslant An,\ \left|\dfrac{dK_n^\alpha(t)}{dt}\right|\leqslant An^2,\ \left|\dfrac{d^2K_n^\alpha(t)}{dt^2}\right|\leqslant An^3;$

(ii) $Q_n^\alpha(t)=\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right\}\Big/(\alpha)_n\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{1+\alpha}$ 的話，則当 $0<t<\frac{3\pi}{2}$ 时，

$$|R_n^\alpha(t)|<At^{-1}\left[\left(\frac{1}{nt}\right)^3+\frac{1}{nt}\right],\quad\left|\frac{dR_n^\alpha}{dt}\right|<At^{-2}\left[\left(\frac{1}{nt}\right)^3+\frac{1}{nt}\right].$$

从 $K_n^\alpha(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{(\alpha)_n}\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha)_{n-\nu}\cos\nu t$，就得到(i)．所要証明的，只有(ii)．当 $\alpha=1$ 时，从

$$K_{n-1}^1(t)=\frac{1}{2n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2=\frac{\sin\left(nt-\frac{\pi}{2}\right)}{(1)_{n-1}\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2}+\frac{1}{4n\sin^2\frac{t}{2}},$$

就获得(ii)．我們已經証明过：当 $-1<\alpha<1$ 时，

$$R_n^\alpha(t)=\frac{O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2}+\mathrm{Im}\left[\frac{a(t)b(t)}{(\alpha)_n}\right],$$

这里

$$a(t)=e^{i\left(n+\frac{3}{2}\right)t}\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{-3},\quad b(t)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(\alpha-3)_\nu e^{-i\nu t}.$$

从而 $a(t)=O(t^{-3})$，$a'(t)=O(nt^{-3})+O(t^{-4})$．易知

$$|(\alpha-3)_n|\ \text{和}\ n|(\alpha-3)_n|$$

都是单調減少的数列，所以 $b(t)=O(n^{\alpha-3}t^{-1})$，$b'(t)=O(n^{\alpha-2}t^{-1})$．因此，我們就完成了(ii)的証明．

$J_1=o(1)$ 是对于积分

$$\int_0^{ky}\varphi(t)K_n^\alpha(t)\,dt=\varphi_1(ky)K_n^\alpha(ky)-\int_0^{ky}\varphi_1(t)\frac{dK_n^\alpha(t)}{dt}dt$$

的絕对值施行运算 $\lim\limits_{k\to\infty}\limsup\limits_{n\to\infty}$ 的結果．事实上，当 $\alpha>0$ 时，右端小于

$$Aky|K_n^\alpha(ky)|+\left|\varphi_2(ky)\frac{dK_n^\alpha(ky)}{dt}-\int_0^{ky}\varphi_2(t)\frac{d^2K_n^\alpha(t)}{dt^2}dt\right|$$

$$<A[(nky)^{-1}+(nky)^{-2}+(nky)^{-\alpha}]+O[n^2(ky)^2]+O\left[\int_0^{ky}n^3t^2dt\right]$$

$$=O\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)+o(1)=o(1)\quad(k\to\infty).$$

这里利用了还未証明的 $\varphi_1(t)=O(t)$ 和 $\varphi_2(t)=o(t^2)$. 对于 $\alpha\leqslant 0$ 的情况,我們还要利用 $\varphi_1(t)=o(t)$: 此时

$$\int_0^{ky}\varphi(t)K_n^\alpha(t)\,dt=\varphi_1(ky)K_n^\alpha(ky)+o(1)$$

$$=o[(nky)^{-1}+(nky)^{-2}+(nky)^{-\alpha}]=o(1).$$

其次証明 $J_2'=o(1)$. 由于 $\varphi_1(t)=O(t)$, 所以

$$\int\varphi R_n^\alpha dt=[\varphi_1R_n^\alpha]-\int\varphi_1(t)\frac{dR_n^\alpha}{dt}\,dt$$

$$=O\left[\frac{1}{nt}+\frac{1}{(nt)^3}\right]_{(k+\nu)y}^{x+(\nu-m)y}+O\int_{(k+\nu)y}^{x+(\nu-m)y}\left[\frac{1}{nt^2}+\frac{1}{n^3t^4}\right]dt=O\left(\frac{1}{k}\right),$$

从而 $J_2'=o(1)$.

$\varphi_1(t)=O(t)$ 的証明. 首先建立等式

$$\Delta_\eta^{n+1}\varphi_r(t)=\int_t^{t+\eta}\Delta_\eta^n\varphi_{r-1}(t)\,dt.$$

由定义, $(-1)^{n+1}\Delta_\eta^{n+1}\varphi_r(t)$ 等于

$$\int_0^t\varphi_{r-1}(u)\,du+\sum_{\nu=1}^n(-1)^\nu\left[\binom{n}{\nu}+\binom{n}{\nu-1}\right]\int_0^{t+\nu\eta}\varphi_{r-1}(u)\,du$$

$$+(-1)^{n+1}\int_0^{t+(n+1)\eta}\varphi_{r-1}(u)\,du$$

$$=\sum_{\nu=0}^n(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\int_0^{t+\nu\eta}\varphi_{r-1}(u)\,du-\sum_{\nu=0}^n(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\int_0^{t+(\nu+1)\eta}\varphi_{r-1}(u)\,du$$

$$=(-1)^{n+1}\int_t^{t+\eta}\sum_{\nu=0}^n(-1)^{n+\nu}\binom{n}{\nu}\varphi_{r-1}(u+\nu\eta)\,du$$

$$=(-1)^{n+1}\int_t^{t+\eta}\Delta_\eta^n\varphi_{r-1}(t)\,dt.$$

由是得到所要的等式. 現在从这个等式导出下面的不等式:

$$\int_{k\eta}^v|\Delta_\eta^n\varphi_r(t)|\,dt\leqslant\eta\int_\eta^{v+\eta}|\Delta^{n-1}\varphi_{r-1}(u)|\,du.$$

我們只要对于任一正值函数 $g(x)$, 建立不等式

$$\int_{k\eta}^v dt\int_t^{t+\eta}g(u)\,du\leqslant\eta\int_{k\eta}^{v+\eta}g(u)\,du$$

就好了. 其实,左边是 $g(u)$ 在 (u,v) 平面上的平行四边形

$$u=t,\ u=t+\eta,\ t=v,\ t=k\eta$$

上的积分．交换积分的次序，这个积分变成下面三个积分的和：

$$\int_{k\eta}^{(k+1)\eta} g(u)\int_{k\eta}^{u} dt\,du+\int_{(k+1)\eta}^{v} g(u)\int_{u-\eta}^{u} dt\,du+\int_{v}^{v+\eta} g(u)\int_{u-\eta}^{v} dt\,du$$

$$\leqslant\eta\left[\int_{k\eta}^{(k+1)\eta} g(u)du+\int_{(k+1)\eta}^{v} g(u)du+\int_{v}^{v+\eta} g(u)du\right]=\eta\int_{k\eta}^{v+\eta} g(u)du.$$

当 $n>r$ 时，我們可以累次应用所得的不等式，而达到

$$\int_{k\eta}^{v}|\varDelta_\eta^n\varphi_r(t)|dt\leqslant\eta^r\int_{k\eta}^{v+r\eta}|\varDelta_\eta^{n-r}\varphi(u)|du.$$

从而

$$\int_{kt}^{\eta-(m+r-1)t}|\varDelta_t^{m+r-1}\varphi_{r-1}(u)|du\leqslant t^{r-1}\int_{kt}^{\eta-mt}|\varDelta_t^m\varphi(u)|du.$$

設 $h'=\dfrac{1}{k+m+r}$，$h=\dfrac{1}{k+m+r-1}$，将上式两边施行 $\int_{h'\eta}^{h\eta}\cdots dt$.

右边是

$$\int_{h'\eta}^{h\eta} t^{r-1-\alpha}t^{\alpha}\int_{kt}^{\eta-mt} u^{1+\alpha}\frac{|\varDelta_t^m\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du\,dt$$

$$\leqslant\eta^{1+\alpha}\int_{h'\eta}^{h\eta} t^{r-1-\alpha}g(m,\alpha,t,k)dt.$$

左边不小于

$$\left|\int_{h'\eta}^{h\eta}dt\int_{kt}^{\eta-(m+r-1)t}\varDelta_t^{m+r-1}\varphi_{r-1}(u)du\right|$$

$$=\left|\int_{h'\eta}^{h\eta}\sum_{\nu=0}^{m+r-1}(-1)^{\nu}\binom{m+r-1}{\nu}\{\varphi_r[\eta-(m+r-1)t+\nu t]-\varphi_r(kt+\nu t)\}dt\right|.$$

上式中相当于 $\nu=m+r-1$ 的項是

$$(h-h')\eta\,\varphi_r(\eta)-\int_{h'\eta}^{h\eta}\varphi_r(kt+(m+r-1)t)dt$$

$$=hh'\eta\,\varphi_r(\eta)+o(\eta^{r+1}).$$

其余各項之和显然地等于 $o(\eta^{r+1})$．由是得着

$$|\varphi_r(\eta)hh'|<o(\eta^r)+\eta^{\alpha}\int_{h'\eta}^{h\eta} t^{r-1-\alpha}g(m,\alpha,t,k)dt.$$

当 $r>1$ 时，有如下的 θ：$0<\theta<1$（不妨假設 $r\neq\alpha$），

$$\frac{1}{hh'}\int_{h'\eta}^{h\eta} t^{r-1-\alpha}\,dt=\frac{\eta^{r-\alpha}}{r-\alpha}\;\frac{h^{r-\alpha}-h'^{r-\alpha}}{hh'}=\eta^{r-\alpha}(k+m+r-\theta)^{1+\alpha-r}.$$

从而

$$|\varphi_r(\eta)\eta^{-r}|<o(1)+(k+m+r-\theta)^{1+\alpha-r}\max_{0<t\leqslant\eta} g(m,\alpha,t,k).$$

令 $k\to\infty$，就得到 $\varphi_r(t)=o(t^r)$．如是逐次演进，一直达到 $\varphi_2(t)=o(t^2)$，乃至 $\varphi_1(t)=O(t)$．但是，在 $\alpha\leqslant 0$ 的情况，我們見到

$$\left|\frac{1}{\eta}\varphi_1(\eta)\right|<o(1)+\max_{0<t\leqslant\eta} g(m,\alpha,t,k)=o(1).$$

从而 $\varphi_1(t)=o(t)$．

我們还要証明 $J_2''=o(1)$．由于 $y=\dfrac{2\pi}{2n+\alpha+1}$，所以

$$\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)(t+\nu y)-\frac{\alpha\pi}{2}\right]=(-1)^{\nu}\sin\left(\frac{t\pi}{y}-\frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

从而

$$J_2''=\sum_{\nu=0}^{2m}\binom{2m}{\nu}\int_{ky}^{\pi-my}\varphi(t+\nu y)Q_n^{\alpha}(t+\nu y)\,dt$$

$$=\sum_{\nu=0}^{2m}\binom{2m}{\nu}\int_{ky}^{\pi-my}\varphi(t+\nu y)\frac{(-1)^{\nu}\sin\left(\frac{t\pi}{y}-\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{(\alpha)_n\left(2\sin\frac{t+\nu y}{2}\right)^{1+\alpha}}\,dt.$$

写着

$$\omega(v)=\frac{2m}{\left(\sin\frac{t+\nu v}{2}\right)^{1+\alpha}}-\frac{2m-\nu}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{1+\alpha}}-\frac{\nu}{\left(\sin\frac{t+2mv}{2}\right)^{1+\alpha}}.$$

并且注意着

$$\binom{2m}{\nu}=\frac{2m\cdots(2m-\nu+1)}{\nu!}=\frac{2m}{2m-\nu}\binom{2m-1}{\nu}=\frac{2m}{\nu}\binom{2m-1}{\nu-1},$$

我們見到

$$\binom{2m}{\nu}\left[\sin\frac{t+\nu y}{2}\right]^{-1-\alpha}=\frac{1}{2m}\,\omega(y)\binom{2m}{\nu}$$
$$+\binom{2m-1}{\nu}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-1-\alpha}$$
$$+\binom{2m-1}{\nu-1}\left[\sin\frac{t+2my}{2}\right]^{-1-\alpha}.$$

将此式代入 J_2''，得到

$$J_2''=\frac{1}{2m}\sum_{\nu=0}^{2m}(-1)^\nu\binom{2m}{\nu}\int_{ky}^{\pi-my}\varphi(t+\nu y)\sin\left(\frac{t\pi}{y}-\frac{\alpha\pi}{2}\right)\frac{\omega(y)}{2^{1+\alpha}(\alpha)_n}dt$$
$$+O[g(2m-1,\alpha,y,k)]$$

末項在 $\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{y\to 0}$ 的运算下，变成 $o(1)$ ($y\to 0$ 就是 $n\to\infty$)． 在估計含有 $\omega(y)$的項之前，我們先証

$$\omega(0)=0,\ \omega'(0)=0,\ \omega''(v)=O(m^3t^{-\alpha-3})\quad(\nu v\leqslant 2my,\ t\leqslant\pi-2my).$$

从 $\omega(v)$ 的定义，立刻見到 $\omega(0)=0$．又因

$$\omega'(v)=m\nu(1+\alpha)\left\{\frac{-\cos\dfrac{t+\nu v}{2}}{\sin^{\alpha+2}\dfrac{t+\nu v}{2}}+\frac{\cos\dfrac{t+2mv}{2}}{\sin^{\alpha+2}\dfrac{t+2mv}{2}}\right\},$$

所以 $\omega'(0)=0$．注意到 $\nu\leqslant 2m$，$t+\nu v\leqslant\pi$，从上式看出：

$$\omega''(v)=O(m^3t^{-\alpha-3}).$$

从而 $\omega(y)=\int_0^y du\int_0^u\omega''(v)dv=O(m^3t^{-\alpha-3}y^2)$．又从

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{1+\alpha}{2}\left\{\frac{-2m\cos\dfrac{t+\nu v}{2}}{\sin^{2+\alpha}\dfrac{t+\nu v}{2}}+\frac{(2m-\nu)\cos\dfrac{t}{2}}{\sin^{2+\alpha}\dfrac{t}{2}}+\frac{\nu\cos\dfrac{t+2mv}{2}}{\sin^{2+\alpha}\dfrac{t+2mv}{2}}\right\},$$

得到 $\left[\dfrac{\partial\omega}{\partial t}\right]_{v=0}=0$．最后，从 $\dfrac{\partial\omega''(v)}{\partial t}=O(m^3t^{-\alpha-4})$ 和

$$\frac{\partial\omega(y)}{\partial t}=\int_0^y du\int_0^u\frac{\partial\omega''(v)}{\partial t}dv$$

得着 $\dfrac{\partial\omega}{\partial t}=O(m^3t^{-\alpha-4}y^2)$．由是，$J_2''$ 中的积分

$$\int_{ky}^{\pi-my}\varphi(t+\nu y)\omega(y)\sin\left(\frac{t\pi}{y}-\frac{\alpha\pi}{2}\right)dt$$
$$=\left[\varphi_1(t+\nu y)\omega(y)\sin\left(\frac{t\pi}{y}-\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]_{ky}^{\pi-my}-(\varepsilon),$$

这里 (ε) 表

$$\int_{ky}^{\pi-my}\varphi_1(t+\nu y)\sin\left(\frac{t\pi}{y}-\frac{\alpha\pi}{2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial t}dt$$
$$+\int_{ky}^{\pi-my}\varphi_1(t+\nu y)\omega(y)\cos\left(\frac{t\pi}{y}-\frac{\alpha\pi}{2}\right)\frac{\pi}{y}dt$$

$$=O\left(y^2\int_{ky}^{\pi} t^{-3-\alpha}dt+y\int_{ky}^{\pi} t^{-2-\alpha}dt\right)=O[k^{-1-\alpha}y^{-\alpha}],$$

巳經积分的项可以并入于 $O(k^{-1-\alpha}y^{-\alpha})$. 因此,我們得到

$$J_2''=\frac{1}{(\alpha)_n}O(k^{-1-\alpha}y^{-\alpha})+o(1)=O(k^{-1-\alpha})=o(1).$$

当 $\alpha>1$ 时, 从上面的方法得到

$$\varphi_1(t)=O(t) \quad 以及 \quad \varphi_\beta(t)=o(t^\beta) \quad (1<\beta<\alpha),$$

定理 1 的証明完毕. (参見 § 12.)

利用定理 1 (日尔斤的定理), 我們能将腦盎揚定理中的条件 $\varphi_1(t)=o(t)$ 改进成 $\varphi_r(t)=o(t^r)$. 下面的定理 2 是哈戴和立脫尔伍德所发見的,見倫敦数学会期刊(J. L. M. S.)第十卷.

定理 2 两个条件 $\int_0^t|\varphi_x(u)|du=O(t)$ 和 $\varphi_r(t)=o(t^r)$ (r: 整数) 包含着

$$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\,(C,\alpha) \quad (\alpha>0).$$

【証明】 这里我們可以从定理 1 簡单地导出定理 2. 事实上,

$$\eta^\alpha\int_{k\eta}^{\pi}\frac{|\varDelta_\eta\varphi_x(u)|du}{u^{1+\alpha}}<A\eta^\alpha\int_{k\eta}^{\pi}\frac{|\varphi_x(u)|}{u^{1+\alpha}}du=O(k^{-\alpha})+O(\eta^\alpha).$$

从而 $\lim\limits_{k\to\infty}\limsup\limits_{\eta\to 0} g(r,\alpha,\eta,k)=0$. 証明完毕.

系*) 設 $\int_0^\pi|\varDelta_\eta\varphi_x(t)|^pdt=O(\eta)\ (p\geqslant 1)$, $\varphi_r(t)=o(t^r)$, 則求和关系

$$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\,(C,\alpha)$$

当 $\alpha>-\dfrac{1}{p}$ 时成立.

【証明】 設 $\delta>0$. 当 $p>1$ 时, 取如下的 q: $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 得到

$$\int_{k\eta}^{\pi}\frac{|\varDelta_\eta\varphi_x(t)|}{t^{\frac{1}{q}+\delta}}dt\leqslant\left[\int_{k\eta}^{\infty}\frac{dt}{t^{1+\delta q}}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_0^\pi|\varDelta_\eta\varphi(t)|^pdt\right]^{\frac{1}{p}}=O\left(k^{-\delta}\eta^{\frac{1}{p}-\delta}\right).$$

从而 $g\left(1,\delta-\dfrac{1}{p},\eta,k\right)=O(k^{-\delta})$. 当 $p=1$ 时,此結果仍然成立. 由定理 1, $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\,(C,\alpha)\left(\alpha>-\dfrac{1}{p}\right)$. 証明完毕.

---

*) 哈戴-立脫尔伍德,(德国) Math. Zeits. 28 (1928).

下列諸事項是值得注意的：

1° 定理1只有在$\alpha\leqslant 2$的情况，才有切实的意义．实际上，$\varphi_2(t)=o(t^2)$的話，$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\ (C,\alpha)$当$\alpha>2$时成立（下文将有証明）．

2° $g(n,\alpha,\eta,k)=o(1)\ (\eta\to 0,k\to\infty)$結合着$\varphi_r(t)=o(t^r)\ (r>1)$，一般地說，并不包含$\varphi_1(t)=o(t)$．事实上，上面已經說过：

$$\int_0^t|\varphi_x(u)|du=O(t)\ \text{含有}\ g(1,\alpha,\eta,k)=o(1).$$

另一方面，存在着如下的$\varphi(t)$：

$$\int_0^t|\varphi(u)|du=O(t),\quad \varphi_2(t)=o(t^2),\quad \varphi_1(t)\neq o(t).$$

3° $g(m,\alpha,\eta,1)=o(1)\ (\eta\to 0)$与$\varphi_r(t)=o(t^r)$含有$\varphi_1(t)=o(t)$．

事实上，$|\varphi_{r-1}(\eta)\eta^{-r+1}|<o(1)+Ag(m,\alpha,t',1)\ (0<t'\leqslant\eta)$，所以$\varphi_{r-1}(t)=o(t^{r-1})$．如是继續进行，就得到$\varphi_1(t)=o(t)$．

11．用蔡查罗求和法可以求和的条件

富理埃級数的收斂問題尙待解决；問題是要用$f(x)$在$x=x_0$附近的性质来决定$\mathfrak{S}[f;x_0]$的收斂．我們所已經知道的收斂条件，大部分是充分条件，还有些是混合判定法．固定x和α，$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\ (C,\alpha)$成立的充要条件，也还沒有发見．但是，固定$x$而不固定$\alpha$，那末$\mathfrak{S}[f;x]$可用$(C,\alpha)$平均法求和的充要条件，已为哈戴和立脫尔伍德所获得［（德国）Math. Zeits. 19(1924)］．他們的結果，包含在下述几个定理中．

定理1 $\mathfrak{S}[f;x]$可用蔡查罗平均法求和的充要条件是$\phi_x(t)$的某一平均函数$\phi_k(t)$在$t=0$具有連續性．

定理1包含在下述两个定理中．

定理2 当$\alpha\geqslant 0$时，关系$\mathfrak{S}[f;x]=S\ (C,\alpha)$含有

$$\lim_{t\to 0}\phi_{[\alpha]+2}(t)=S,$$

这里$2\phi_0(t)=f(x+t)+f(x-t)$．

定理3 假如$\lim\limits_{t\to 0}\phi_k(t)=S$，那末当$\alpha>k$时，$\mathfrak{S}[f;x]=S(C,\alpha)$．

对于任一級数 $u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n$，我們引入如下的种种記号：

$$h_\nu^0(u)=u_0+\cdots+u_\nu,\quad h_\nu^r(u)=\frac{h_0^{r-1}+\cdots+h_\nu^{r-1}}{\nu+1}\quad(\nu=1,\ 2,\ \cdots),$$

$$h_\nu^{-1}(u)=h_\nu^0(u)+\nu u_\nu,\quad \sigma_n^\alpha(u)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(\alpha)_\nu}{(\alpha)_n}u_{n-\nu},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\{u_0+u_1+\cdots+u_n\}.$$

由是

$$h_n^1\{h_m^{-1}\}=\frac{h_0^{-1}+h_1^{-1}+\cdots+h_n^{-1}}{n+1}=u_0+u_1+\cdots+u_n=h_n^0(u).$$

因此 $\lim h_n^{-1}(u)=S$ 等价于 $u_0+u_1+\cdots+u_n\to S$ 和 $nu_n\to 0$ 两个关系，而可以簡写为 $\sum u_n=S(C,\ -1)$. 例如当收斂級数 $S=\sum c_n$ 的項适合 $c_n\geqslant c_{n+1}(n=0,\ \cdots)$ 时，

$$\sum c_n=S(C,\ -1).$$

当 $\lim\limits_{s\to+0}\int_s^t\phi_{k-1}(u)\,du$ 存在时，我們說 $\phi_0(t)$ 的 k 次平均函数

$$\phi_k(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\phi_{k-1}(u)\,du$$

存在，并且写着：

$$\phi_k(t)\sim a_{0k}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{nk}\cos nt,\ \phi_k=\{S_n^k\},\ S_n^k=\sum_{0}^{n}a_{\nu k}.$$

引理 1 当 $\phi_{k+2}(t)$ 存在时，成立着

$$h_n^0(\phi_k)-2h_n^0(\phi_{k+1})+h_n^{-1}(\phi_{k+1})=\frac{1}{2}(a_{nk}-a_{n,k+1})+o(1).$$

【証明】 我們不妨假設 $a_{0k}=0$，从而 $\phi_{k+1}(\pi)=0$；并且

$$h_n^0(\phi_k)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\phi_k(2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\phi_{k+1}(2t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right)dt=J_1+J_2+J_3,$$

这里

$$J_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\phi_{k+1}(2t)\frac{t\cos t}{\sin t}\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\phi_{k+1}(2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt+o(1)=h_n^0(\phi_{k+1})+o(1),$$

$$J_2=\frac{2n+1}{2\pi}\int_0^{\pi}t\phi_{k+1}(t)\sin nt\,dt$$

$$=\left[\frac{2n+1}{2\pi}t\phi_{k+1}(t)\frac{-\cos nt}{n}\right]_0^{\pi}+\frac{2n+1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\phi_k(t)\cos nt\,dt$$

$$=\frac{1}{2}a_{nk}+o(1),$$

事实上，$a_{nk}=\dfrac{2n}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}t\phi_{k+1}(t)\sin nt\,dt=o(n)$，

$$J_3=-\frac{4n+2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\phi_{k+1}(2t)\cos 2nt dt$$

$$+\frac{4n+2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-t\cot t)\phi_{k+1}(2t)\cos 2nt\,dt$$

$$=-\frac{2n+1}{2}a_{n,k+1}+\frac{2n+1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2nt\frac{d}{dt}[(t\cot t-1)\phi_{k+1}(2t)]dt$$

$$=-\frac{2n+1}{2}a_{n,k+1}+o(1).$$

从而

$$h_n^0(\phi_k)-2h_n^0(\phi_{k+1})+[h_n^0(\phi_{k+1})+na_{n,k+1}]=-\frac{1}{2}a_{n,k+1}+\frac{1}{2}a_{nk}+o(1).$$

这就是所要的等式.

引理 2 当 $\phi_{k+1}(t)$ 存在时，$a_{1k}+a_{2k}+\cdots+a_{nk}=o(n)$.

【証明】 $\pi(a_{1k}+\cdots+a_{nk})$ 等于 $O(1)$ 加上

$$\int_0^{\pi}\phi_k(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}dt=\int_0^{\pi}\phi_k(t)\sin nt\cot\frac{t}{2}dt+\int_0^{\pi}\phi_k(t)\cos nt\,dt$$

$$=2\int_0^{\pi}\frac{\phi_k(t)}{t}\sin nt\,dt+o(n).$$

写着

$$\int_0^{\pi}\frac{\phi_k(t)}{t}\sin nt\,dt=\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\eta}+\int_{\eta}^{\pi}\frac{\phi_k(t)}{t}\sin nt\,dt,$$

$\left(0, \frac{1}{n}\right)$ 中有 ξ 适合

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\phi_k(t)}{t} \sin nt\, dt = n \int_0^{\xi} \phi_k(t)\, dt = o(n).$$

由 $t\phi_k(t)$ 的連續性，

$$\left|\int_{\frac{1}{n}}^{\eta} \frac{\phi_k(t)}{t} \sin nt\, dt\right| \leqslant \max_{0<t<\eta} |t\phi_k(t)| \int_{\frac{1}{n}}^{\eta} t^{-2}\, dt = o(n).$$

固定着 η, (η, π) 上的积分显然是 $o(1)$. 証明完毕.

引理 3 当 $\phi_{k+2}(t)$ 存在时,

$$h_n^1(\phi_k) - 2h_n^1(\phi_{k+1}) + h_n^0(\phi_{k+1}) = -\frac{1}{2} a_{n,k+1} + o(1).$$

【証明】 当証明时,不妨假設 $a_{0k}=0$, 从而 $\phi_{k+1}(\pi)=0$. 由是

$$h_n^1(\phi_k) = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi_k(2t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\phi_{k+1}(2t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt$$

$$= \frac{4}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan t}\phi_{k+1}(2t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin 2t}\phi_{k+1}(2t)\,\frac{\sin(2n+1)t + \sin(2n-1)t}{\sin t}\,dt$$

$$= 2h_n^1(\phi_{k+1}) - \frac{1}{2}h_n^0(\phi_{k+1}) - \frac{1}{2}h_{n-1}^0(\phi_{k+1}) + o(1).$$

中間两項的和等于 $-h_n^0(\phi_{k+1}) + \frac{1}{2}a_{n,k+1}$, 从而即得引理 3 的等式.

結合引理 1 和引理 3, 我們可証概括性的命題:

引理 4 假如 $\phi_{k+1}(t)$ 存在,那末当 $r=0, 1, 2, \cdots$ 以及 $\nu=0, 1, \cdots, k$ 时,成立着

$$h_n^r(\phi_k) - 2h_n^r(\phi_{k+1}) + h_n^{r-1}(\phi_{k+1}) = o(1), \quad a_{n,\nu} = o(1).$$

【証明】 由引理 1 和引理 2, 从

$$h_n^1\{h_m^0(\phi_k) - 2h_m^0(\phi_{k+1}) + h_m^{-1}(\phi_{k+1})\} = \frac{1}{2}h_n^1\{a_{mk} - a_{m,k+1}\} + o(1),$$

得到 $h_n^1(\phi_k) - 2h_n^1(\phi_{k+1}) + h_n^0(\phi_{k+1}) = o(1)$. 将此結果結合到引理 3,

那末当 $\phi_{k+2}(t)$ 存在时，我們得到

$$a_{n,\,k+1}=o(1).$$

但是 $\phi_{k+1}(t)$ 的存在含有 $\phi_k(t)$，$\phi_{k-1}(t)$，…，$\phi_1(t)$ 的存在，因此，$a_{nk}=o(1)$，…，$a_{n0}=o(1)$. 从而引理 1 的結果簡化成

$$h_n^0(\phi_k)-2h_n^0(\phi_{k+1})+h_n^{-1}(\phi_{k+1})=o(1).$$

两边継續取算术平均，就完成了引理 4 的証明.

引理 5 当 $\phi_{k+2}(t)$ 存在时，置

$$v_n=2a_{nk}-n(a_{n-1,\,k+1}-a_{n+1,\,k+1}).$$

假如 $a_{0k}=0$，那末 $v_n=o(1)$ 并且 $v_1+v_2+\cdots=o(C,\,2)$.

【証明】 由于 $a_{0k}=0$，所以 $2a_{nk}$ 等于

$$\frac{4n}{\pi}\int_0^\pi t\,\phi_{k+1}(t)\sin nt\,dt$$

$$=\frac{4n}{\pi}\int_0^\pi\phi_{k+1}(t)\,\sin t\sin nt\,dt+\frac{4n}{\pi}\int_0^\pi(t-\sin t)\,\phi_{k+1}(t)\sin nt\,dt.$$

第一項等于

$$\frac{2n}{\pi}\int_0^\pi\phi_{k+1}(t)\,[\cos(n-1)t-\cos(n+1)t]\,dt=n[a_{n-1,\,k+1}-a_{n+1,\,k+1}].$$

从 v_n 的定义和上面的等式，我們見到

$$v_n=\frac{2n}{\pi}\int_{-\pi}^\pi(t-\sin t)\,\phi_{k+1}(t)\sin nt\,dt$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^\pi\cos nt\,\frac{d}{dt}\{(t-\sin t)\,\phi_{k+1}(t)\}\,dt=o(1).$$

我們知道：一般地，

$$\left[\int^x f(t)\,dt\right]'=f(x)\text{ 含有 }\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\,(C,2).$$

从而

$$v_1+v_2+\cdots=o(C,\,2).$$

引理 5 証毕.

引理 6 用蔡查罗的平均法，假如級数 $\sum a_{nk}$ 可以求和，那末当 $a_{nk}=O(1)$ 时，級数 $\sum a_{n,\,k+1}$ 也可以求和.

【証明】 首先証明：当 $\sum a_{nk}$ 可用 (C) 求和法求和时，$\phi_{k+1}(t)$ 存在. 为簡单起見，写着 $a_{nk}=a_n$，并且假設 $a_0=0$. 置

$$g_1(t)=\int_0^t \phi_{k-1}(u)\,du, \qquad g_2(t)=\int_0^t g_1(u)\,du,$$

则当 $0<\varepsilon<1$ 时，

$$\int_\varepsilon^1 \phi_k(t)\,dt=\int_\varepsilon^1 \frac{g_1(t)}{t}\,dt=\left[\frac{g_2(t)}{t}\right]_\varepsilon^1+\int_\varepsilon^1 \frac{g_2(t)}{t^2}\,dt.$$

由是，$\phi_{k+1}(t)$ 存在的充要条件是 $\int_{+0}^1 \frac{g_2(t)}{t^2}\,dt$ 的存在. 假設 $g_1(-t)=-g_1(t)$，那末 $g_1(t)\sim\sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha_n}{n}\sin nt$. 由于 $g_1(t)$ 是一連續函数 $(\alpha_0=0)$，所以当 $0\leqslant t\leqslant\pi$ 时，

$$g_1(t)=\sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha_n}{n}\sin nt\,(C,\,1).$$

又由假設 $\alpha_n=O(1)$，$\sum\alpha_n$ 是以 (C) 可求和的，从而 $\sum\frac{\alpha_n}{n}$ 也可以 (C) 求和的. 由立脱尔伍德的討褒定理，$\sum\frac{\alpha_n}{n}$ 是收斂的. 現在

$$\int_\varepsilon^1 g_2(t)\,\frac{dt}{t^2}=\sum\alpha_n\int_\varepsilon^1 \frac{1-\cos nt}{(nt)^2}\,dt$$

$$=\sum\frac{\alpha_n}{n}\left\{\int_{\frac{1}{2}\varepsilon n}^\infty\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt-\int_{\frac{1}{2}n}^\infty\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt\right\}.$$

由是可知，級数关于 ε 是勻斂的. 从而得到

$$\int_0^1 g_2(t)\,\frac{dt}{t^2}=\sum\frac{\alpha_n}{n}\int_0^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

我們証明了 $\phi_{k+1}(t)$ 的存在，因此 $\alpha_{n,k+1}$ 存在. 簡写

$$\beta_n=\alpha_{n,k+1}.$$

由引理 5，$v_n=2\alpha_n-n(\beta_{n-1}-\beta_{n+1})=o(1)$，$v_1+v_2+\cdots=o(C,\,2)$. 以

$$w_n=2\alpha_n-v_n$$

为第 n 項的級数 $\sum w_n$ 是可用 (C) 求和法求和的，且 $w_n=o(1)$. 因此級数 $\sum_{n+1}^\infty w_\nu/\nu$ 收斂，記其和为 γ_n. 由是

$$\gamma_n=\sum_{\nu=n+1}^\infty(\beta_{\nu-1}-\beta_{\nu+1})=\beta_n+\beta_{n+1},$$

$$\beta_0+\sum_{m=0}^n\gamma_m=2\sum_{m=0}^n\beta_m+o(1).$$

証明归結于証明 $\sum\gamma_n$ 可用(C)平均法求和。这事包含在下面的引理中。

引理 7 当 $\sum w_\nu$ 可用(C)平均法求和时，$\sum\gamma_n$ 也可用(C)平均法求和，但 $\gamma_n=\sum_{n+1}^{\infty}w_\nu/\nu$.

【証明】 将級数 $w_1+w_2+\cdots$ 和 $\gamma_0+\gamma_1+\cdots$ 分别記做 w 和 γ，并且写着

$$S_n^\alpha(w)=\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha)_{n-\nu}w_{\nu+1},\quad S_n^\alpha(\gamma)=\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha)_{n-\nu}\gamma_\nu, S_n^{-1}(\gamma)=\gamma_n.$$

由于

$$\sum_{\nu=1}^{n+1}w_\nu=\sum_{\nu=1}^{n+1}\nu(\gamma_{\nu-1}-\gamma_\nu)=\sum_{m=1}^{n}(\gamma_m-\gamma_0)+(n+1)(\gamma_0-\gamma_{n+1})$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\gamma_m-(n+1)\gamma_{n+1},$$

所以等式

$$S_n^\alpha(w)=(\alpha+1)S_n^\alpha(\gamma)-(n+1)S_{n+1}^{\alpha-1}(\gamma)$$

当 $\alpha=0$ 时成立。假如此式对于 α 是成立的，那末

$$S_n^{\alpha+1}(w)=(\alpha+1)\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu^\alpha(\gamma)-\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)S_{\nu+1}^{\alpha-1}(\gamma)$$

$$=(\alpha+2)S_n^{\alpha+1}(\gamma)-\sum_{\nu=0}^{n}[S_\nu^\alpha(\gamma)+(\nu+1)S_{\nu+1}^{\alpha-1}(\gamma)]$$

$$=(\alpha+2)S_n^{\alpha+1}(\gamma)-(n+1)[S_0^{\alpha-1}(\gamma)+\cdots+S_{n+1}^{\alpha-1}(\gamma)].$$

因此，等式当 $\alpha=0, 1, 2, \cdots$ 时都成立。将等式改写成

$$\frac{S_n^\alpha(w)}{(\alpha)_n}=\{(\alpha+1)S_n^\alpha(\gamma)-(n+1)[S_{n+1}^\alpha(\gamma)-S_n^\alpha(\gamma)]\}/(\alpha)_n,$$

这可以簡化为

$$\frac{\sigma_n^\alpha(w)}{(n+\alpha+1)(n+\alpha+2)}=\frac{\sigma_n^\alpha(\gamma)}{n+\alpha+1}-\frac{\sigma_{n+1}^\alpha(\gamma)}{n+\alpha+2}.$$

假如 $\sigma_n^\alpha(w)\to 0$，那末，由加法，

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\sigma_n^\alpha(w)}{(n+\alpha+1)(n+\alpha+2)}=\frac{\sigma_N^\alpha(\gamma)}{N+\alpha+1}.$$

左边等于 $O\left(\frac{1}{N}\right)$，从而 $\sigma_N^\alpha(\gamma)=o(1)$。更深入一步，由于

$$\sigma_{n+1}^{\alpha-1}(\gamma)=(\alpha+1)\frac{S_n^\alpha(\gamma)}{(\alpha-1)_{n+1}(n+1)}-\frac{S_n^\alpha(w)}{(n+1)(\alpha-1)_{n+1}},$$

所以 $\sigma_n^{\alpha-1}(\gamma)=o(1)$ [*]. 証明完毕.

引理 8 当 $\alpha(\geqslant 0)$ 是一个整数时，$\sigma_n^\alpha(\phi_k)\to S$ 等价于

$$h_n^{\alpha-1}(\phi_{k+1})\to S.$$

【証明】 首先証明：对于任一級数 $u=\sum_0^\infty u_n$, $h_n^\alpha(u)\to S$ 等价于 $\sigma_n^\alpha(u)\to S$; 但 $\alpha=0, 1, 2, \cdots$ [†].

簡記数列 $\{h_n^\alpha\}$ 为 H_α, $\sigma_n^\alpha(H_k)=\dfrac{S_n^\alpha(H_k)}{(\alpha)_n}$ 等等. 我們用数学归納法建立恒等式

$$S_n^{(k)}(H_0)=(1-k)S_n^{(k)}(H_1)+(n+k)S_n^{(k-1)}(H_1).$$

当 $k=1$ 时，此式显然成立. 現在从上式导出 $k+1$ 时的等式：于上式施行加法 $\sum_{n=0}^m$，得到

$$S_m^{(k+1)}(H_0)=(1-k)S_m^{(k+1)}(H_1)+kS_m^{(k)}(H_1)+\sum_{n=0}^m nS_n^{(k-1)}(H_1).$$

末項等于

$$-\sum_{n=0}^{m-1}S_n^{(k)}(H_1)+mS_m^{(k)}(H_1)=-S_m^{(k+1)}(H_1)+(m+1)S_m^{(k)}(H_1).$$

由是知道恒等式在 $k+1$ 时成立，从而一般地成立.

用 $(\alpha)_n$ 除恒等式的两边，得到

$$\text{(I)}\qquad \sigma_n^{(k)}(H_0)=(1-k)\sigma_n^{(k)}(H_1)+k\sigma_n^{(k-1)}(H_1).$$

假如 $\sigma_n^{(k-1)}(H_1)\to S$，那末 $\sigma_n^{(k)}(H_1)\to S$. 从而由上式，$\sigma_n^{(k)}(H_0)\to S$. 因此，当 $h_n^k(u)\to S$ 或是 $\sigma_n^{(0)}(H_k)\to S$ 时，

$$\sigma_n^{(1)}(H_{k-1})\to S,\ \sigma_n^{(2)}(H_{k-2})\to S,\ \cdots,\ \sigma_n^{(k)}(H_0)\to S.$$

这就是說：$h_n^k\to S$ 含有 $\sigma_n^{(k)}\to S$（克諾普）. 要反过来說，我們将恒等式改写成

$$S_n^{(k)}(H_0)=(n+1)S_n^{(k)}(H_1)-(n+k)S_{n-1}^{(k)}(H_1).$$

就得到 $\sigma_n^{(k)}(H_0)=(n+1)\sigma_n^{(k)}(H_1)-n\sigma_{n-1}^{(k)}(H_1)$. 取算术平均：

---

[*] 此結果当 $\alpha=0$ 时，也能証其成立；$\sigma_n^0(w)\to 0$ 的話。

[†] 这是克諾普(Knopp)和薛乃(Schnee)的定理.

$$\text{(II)}\qquad \frac{\sigma_0^{(k)}(H_0)+\sigma_1^{(k)}(H_0)+\cdots+\sigma_n^{(k)}(H_0)}{n+1}=\sigma_n^{(k)}(H_1).$$

假如 $\sigma_n^{(k)}(H_0)\to S$，那末从 (II)，$\sigma_n^{(k)}(H_1)\to S$．又由 (II) 得到 $\sigma_n^{(k-1)}(H_1)\to S$．从而

$$\sigma_n^{(k-1)}(H_2)\to S,\ \sigma_n^{(k-2)}(H_3)\to S,\ \cdots,\ \sigma_n^{(0)}(H_k)\to S.$$

这就是説：$\sigma_n^k(H_0)\to S$ 含有 $h_n^k\to S$（薛乃）．

現在，从 $\sigma_n^{\alpha-1}(\phi_{k+1})\to S$ 导出 $\sigma_n^\alpha(\phi_k)\to S$．由引理 4，成立着

$$h_n^\alpha(\phi_k)-2h_n^\alpha(\phi_{k+1})+h_n^{\alpha-1}(\phi_{k+1})=o(1).$$

从假設，我們可以順次推得

$$h_n^{\alpha-1}(\phi_{k+1})\to S,\ h_n^\alpha(\phi_{k+1})\to S,\ h_n^\alpha(\phi_k)\to S,\ \sigma_n^\alpha(\phi_k)\to S.$$

倒轉来說：当 $\sigma_n^\alpha(\phi_k)\to S$ 时，$h_n^\alpha(\phi_k)\to S$；由引理 4，

$$S-2h_n^\alpha(\phi_{k+1})+h_n^{\alpha-1}(\phi_{k+1})=o(1).$$

又由引理 4 和引理 6，存在最小的 r，使 $\lim h_n^r(\phi_{k+1})$ 存在．假如 $r>\alpha-1$，那末，从上式 $\lim h_n^\alpha(\phi_{k+1})$ 也不存在；从

$$S-2h_r^{\alpha+1}(\phi_{k+1})+h_n^\alpha(\phi_{k+1})=o(1),$$

$\lim h_n^{\alpha+1}(\phi_{k+1})$ 也不存在；如是继續进行，达到 $\lim h_n^r(\phi_{k+1})$ 不存在的矛盾．因此 $r\leqslant\alpha-1$，$\sigma_n^{\alpha-1}(\phi_{k+1})\to S$．証明完毕．

【定理 2 的証明】 为簡单起見，我們假設 α 是一个整数．現在要从 $\mathfrak{S}[f;x]=S(C,\alpha)$ $(\alpha\geqslant 0)$ 导出 $\lim\limits_{t\to 0}\phi_{\alpha+2}(t)=S$．写着

$$\frac{1}{2}A_0=a_{00},\ A_n(x)=a_{n0},\quad \phi_0(t)\sim\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^\infty A_n\cos nt.$$

当 $\frac{1}{2}A_0+\sum\limits_{n=1}^\infty A_n=S(C,\alpha)$ 时，由引理 8，順次获得一系列的結果：

$$\sigma_n^{\alpha-1}(\phi_1)\to S,\ \sigma_n^{\alpha-2}(\phi_2)\to S,\ \cdots,\ \sigma_n^0(\phi_\alpha)\to S,\ \sigma_n^{-1}(\phi_{\alpha+1})\to S.$$

最后的結果就是

$$\lim_{n\to\infty}(a_{0,\alpha+1}+a_{1,\alpha+1}+\cdots+a_{n,\alpha+1}+n\,a_{n,\alpha+1})=S.$$

由于 $\phi_{\alpha+1}(t)\sim\sum a_{n,\alpha+1}\cos nt$，所以

$$\phi_{\alpha+2}(t)=\sum_0^\infty\frac{a_{n,\alpha+1}\sin nt}{nt}=\sum_1^{[1/t]}+\sum_{[1/t]+1}^\infty.$$

由于 $n\,a_{n,\alpha+1}=o(1)$，所以上式末項当 $t\to 0$ 时，是 $o(1)$．从而

$$\phi_{\alpha+2}(t)=\sum_{n=0}^{[1/\sqrt{T}]}a_{n,\alpha+1}+\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}O\left(\left|\sum_{n>[1/\sqrt{T}]}^{T}a_{n,\alpha+1}\right|\right)+o(1)$$
$$=S+o(1)\quad(t\to 0),$$

式中 $T<\frac{1}{t}$.

【定理3的証明】 假如 $\phi_k(t)\to S\ (t\to 0)$，那末

$$\int_0^t|\phi_k(t)-S|\,dt=o(t).$$

由日尔斤的定理，$\sigma_n^1(\phi_k)\to S$. 由引理8，$\sigma_n^{k+1}(\phi_\kappa)\to S$；或是 $\mathfrak{S}[f;x]=S(C,k+1)$. 定理証毕*).

定理1的求和条件，必要且充分，是对一般的 $\mathfrak{S}[f]$ 而言的，假如 f 是有界，那末 $\mathfrak{S}[f;x]$ 可用 (C) 平均法求和的充要条件大大的簡化. 我們有如下的定理(哈戴-立脫尔伍德，倫敦数学会期刊 J. L. M. S. 第一卷，1926).

定理4 在点 x 的附近，假如 f 是单方有界，这就是說，有如下的 K 和 ε:

$$f(x+t)>-K\quad(-\varepsilon\leqslant t\leqslant\varepsilon),$$

那末 $\mathfrak{S}[f;x]=S(C)$ 的充要条件是 $\phi_1(t)=S+o(1)$. 当此条件成立时，$\mathfrak{S}[f;x]=S(C,\alpha)$ 对于任何正数 α 成立.

【証明】 先証条件的必要性. 就是要从 $\mathfrak{S}[f;x]=S(C)$ 导出 $\varphi(t)=o(t)$. 由定理2，有 $\varphi_r^*(t)=\phi_r(t)-S$ 适合于 $\varphi_r^*(t)=o(1)$. 单边有界条件 $\phi_0(t)>-K$ 含有

$$\phi_1(t)>-K,\quad\phi_2(t)>-K,\ \cdots,\quad\phi_r(t)>-K.$$

要从 $\varphi_r^*(t)=o(1)$ 导出 $\varphi_{r-1}^*(t)=o(1)$，不妨假設 $r=2$. 假如 $\varphi_2^*(t)=o(1)$ 而 $\varphi_1^*(t)$ 不是 $o(1)$，那末存在如下的 p 和 $\{t_\nu\}$，$p>0$，$t_\nu\to 0$，

$$\varphi_1^*(t_\nu)\geqslant p\ \text{ 或 }\ \varphi_1^*(t_\nu)\leqslant -p$$

成立. 設第一个关系对于无数个 t_ν 成立，又設 $\frac{p-K\eta_0}{1+\eta_0}=\frac{p}{3}$，则当 $0\leqslant\eta\leqslant\eta_0$ 时，

*) 这里只对于 α 是整数的情况，加以証明. 一般的情况，参見著者的《直交函数級数的和》.

$$\varphi_1^*(t_\nu+\eta t_\nu)=\frac{1}{(1+\eta)t_\nu}\int_0^{(1+\eta)t_\nu}\varphi_0^*(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{1+\eta}\ \varphi_1^*(t_\nu)+\frac{1}{(1+\eta)t_\nu}\int_{t_\nu}^{(1+\eta)t_\nu}\varphi_0^*(t)\,dt\geqslant\frac{b-K\eta}{1+\eta}\geqslant\frac{p}{3},$$

由是，$\varphi_1^*(t_\nu+\eta t_\nu)\geqslant\frac{p}{3}\ (0\leqslant\eta\leqslant\eta_0)$，从而

$$\int_{t_\nu}^{(1+\eta_0)t_\nu}\varphi_1^*(t)\,dt\geqslant\frac{\eta_0 t_\nu p}{3}=\frac{p\,t_\nu}{3}\cdot\frac{2p}{p+3K},$$

$$\varphi_2^*(t_\nu+\eta_0 t_\nu)\geqslant\frac{2p^2}{3(1+\eta_0)(p+3K)}+\frac{\varphi_2^*(t_\nu)}{1+\eta_0}.$$

这是和 $\varphi_2^*(t)=o(1)$ 不相容的．同样可証 $\varphi_1^*(t_\nu)\leqslant-p$ 也不会对于无数个 t_ν 成立．由是 $\varphi_1^*(t)=o(1)$．

其次証明 $\int_0^t|\varphi_1^*(u)|\,du=O(t)\ (t\to+0)$．写着

$$\phi^+=\frac{\varphi_1^*+|\varphi_1^*|}{2},\quad \phi^-=\frac{|\varphi_1^*|-\varphi_1^*}{2},$$

那末 $\int_0^t|\varphi_0^*(u)|\,du=\int_0^t(\varphi_0^*+2\phi^-)\,du\leqslant o(t)+2Kt=O(t)$．由是，当 $\alpha>0$ 时，$\mathfrak{S}[f;x]=S(C,\alpha)$．証明完毕．

12．蔡查罗的平均函数

記 $\phi(t)=[\phi(t)]_0$，

$$[\phi(t)]_\alpha=\frac{\alpha}{t^\alpha}\int_0^t\phi(u)\,(t-u)^{\alpha-1}du\quad(\alpha>0),$$

称 $[\phi(t)]_\alpha$ 为 $\phi(t)$ 的**蔡查罗 α 次平均函数**．前节的

$$\phi_k(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\int_0^{t_2}\cdots\int_0^{t_{k-2}}\frac{dt_{k-1}}{t_{k-1}}\int_0^{t_{k-1}}\phi(t_k)\,dt_k$$

是 $\phi(t)$ 的**赫耳賽(Hölder) k 次平均函数**．相当于克諾普和薛乃的定理，当 k 是整数时，我們可証

$$[\phi(t)]_k\to0\ \text{和}\ \phi_k(t)\to0$$

等价[見哈戴-立脱尔伍德，(德国) Math. Zeits. 19(1924), 95—96]．

当 $[\alpha]=\alpha$ 时，容易明白

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}[\phi(t)]_{\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\phi(u)(t-u)^{\alpha-1}du$$
$$=\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{\alpha-1}}\phi(t_{\alpha-1})dt_{\alpha-1}\cdots dt_1.$$

因此当$[\alpha]<\alpha$时，$t^{\alpha}[\phi(t)]_{\alpha}$是$\phi$的"$\alpha$次"的积分．这是黎曼和刘維耳(Liouville)的分数次积分的定义．由于$[\phi(t)]_{\alpha}$并无周期性，所以一般地說，对于三角級数的研究，$[\phi(t)]_{\alpha}$是不适宜的．但是，这里我們所考虑的，重点是在$t=0$的附近的函数性质，所以$[\phi(t)]_{\alpha}$还是有一些用处．例如我們有如下的定理：$[\varphi_x(t)]_k=o(1)$含有$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)(C,k+1)$，$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)(C,k)$含有$[\varphi_x(t)]_{k+2}=o(1)$．这些結果，都見之于上面所引1924年的文中．哈代-立脫尔伍德于1927年在劍桥哲学会志(Proc. Cambridge Phil. Soc. 23)上发表了如下的結果：設$0<\alpha<1$，則当$[\varphi_x(t)]_{\alpha}=o(1)$时，对于任一正数$\delta$，成立着

$$\mathfrak{S}[f;x]=0(C,\alpha+\delta).$$

这里的$(C,\alpha+\delta)$不可以改进为(C,α)，这是威納(N. Wiener)所指出的［見麻省工学院的数理期刊7(1928)］．但是定理中对于α的限制$0<\alpha<1$是可以放寬的；事实上，当$[\varphi_x(t)]_{\alpha}=o(1)$对于某一$\alpha(\alpha\geqslant 0)$成立时，$\mathfrak{S}[f;x]=o(C,\alpha+\delta)$ $(\delta>0)$成立．这是波山桂(Bosanquet)証明的［倫敦数学会志Proc. L. M. S. (2), 31 (1930)］，他又証明$\mathfrak{S}[f;x]=o(C,\alpha)$ $(\alpha\geqslant 0)$含有

$$[\varphi_x(t)]_{\alpha+1+\varepsilon}=o(1)\quad(\varepsilon>0).$$

波山桂对于当日瓦-富理埃級数，也获得类似的結果［1932, 1934的上述Proc. L. M. S.］．在1934年的文中，波山桂扩充前述日尔斤的定理(§10)为如下的命題：設$\alpha>0$，

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{\eta\to 0}\int_{k\eta}^{\pi}\frac{|[\varphi_x(t+\eta)]_{\alpha}-[\varphi_x(t)]_{\alpha}|}{t}dt=0,$$

則当$\mathfrak{S}[f;x]=S(C)$时，$\mathfrak{S}[f;x]=S(C,\alpha)$．此式成立的充要条件是

$$[\phi(t)]_{\alpha+1}=S+o(1).$$

在$\alpha=0$的情况，定理已述于前．

两个条件 $\int_0^t \varphi_x(u)du=o(1)$ 和 $\int_0^t |\varphi_x(u)|du=O(t)$ 含有 $\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\ (C,1)$. 这是腕盆揚的定理，坡拉特把它推到如下的情况：对于某一正整数 r，假如

$$[\phi(t)]_{r+1}=S+o(1),\quad \int_0^t |[\phi(u)]_r|du=O(t),$$

那末 $\mathfrak{S}[f;x]=S(C,r+1)$ [見劍桥哲学会志，23(1927)]. 我們要問：当条件

$$\int_0^t |[\phi(t)]_\alpha|dt=O(t)\quad (\alpha\geqslant 0)$$

成立时，$\mathfrak{S}[f;x]=S(C,\beta)$ 对于怎样的 β 有效？波山桂于上述 1934 年的文章中指出：当 $\int_0^t |[\phi]_\alpha|dt=O(t)$ 时，$\mathfrak{S}[f;x]$ 可用 (C) 求和法求和的充要条件是极限

$$\lim_{t\to 0}[\phi(t)]_{\alpha+1+\varepsilon}$$

对于任一正数 ε 存在；在这个情况下，假如上記的极限不存在，那末 $\mathfrak{S}[f;x]$ 也不能用阿培耳求和法求和. 波山桂又指出：$[\phi(t)]_\alpha=O(1)$ $(\alpha\geqslant 0)$ 的話，$\mathfrak{S}[f;x]$ 可用 (C) 法求和的充要条件是极限

$$\lim_{t\to 0}[\phi(t)]_{\alpha+\varepsilon}$$

对于任一 $\varepsilon\ (\varepsilon>0)$ 存在；存在的話，$\mathfrak{S}[f;x]=S(C,\beta)$ 当 $\beta>\alpha$ 时成立；不存在的話，$\mathfrak{S}[f;x]$ 不能用阿培耳方法求和.

13. 負数級的棻查罗平均法

当 α 为負数时，(C,α) 平均法，只能施行于 $(C,0)$ 可求和的級数——收斂級数，把負数 α 級的 (C,α) 施行于收斂級数，可以探得級数的深刻性质，例如收斂的速率等事.

負数級的 (C) 平均法和正数級的 (C) 平均法，对于富理埃級数来說，有很不相同的地方. 当 $\alpha\geqslant 0$ 时，关系

$$\mathfrak{S}[f;x]=S(C,\alpha)$$

的成立或不成立，是 f 在 x 的一个"地方性"(局部性). 但是，当 $\alpha<0$

时，$\mathfrak{S}[f;x]$是否可用(C,α)平均法求和，并不是f的一个地方性，而是依靠着f整个函数的性质．事实上，戈格貝脱良兹(Kogbetliantz)曾經做出下面的例子．設

$$f(x)=|x|^{-\alpha}\quad(0<\alpha<1,\ -\varepsilon<x<\varepsilon,\ \varepsilon<\pi),$$
$$f(x)=0\qquad(\varepsilon\leqslant|x|\leqslant\pi);\ f(x+2\pi)=f(x),$$

則当$-1<\beta\leqslant\alpha-1$时，$\mathfrak{S}[f;x]=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\ (C,\beta)$在任何区間中不成立[巴黎科学报告 C. R. 168 (1919)]．

一般地說，負数α級的(C,α)可分成$\alpha<-1$和$\alpha\geqslant-1$两种，在后者的情况，可以說是"正常的"；另一方面，汉(H. Hahn)曾举出一个发散級数，用級小于-1的(C)求和法，使其和为0[德意志数学会报 25(1916)]．

最初用負数級的(C)法来研究$\mathfrak{S}[f;x]$的，是哈戴和立脱尔伍德，他們于1913年的倫敦数学会志(Proc. L. M. S.)上指出楊格的收斂条件足以保証$\mathfrak{S}[f;x]=f(x)\ (C,\alpha)$，$-1<\alpha<0$．后来他們又指出：

$$\phi_1(t)=f(x)+o(t)\quad(t\to0)$$

是$\mathfrak{S}[f;x]$可用負数級(C)求和的一个必要条件[(意大利)派賴尔摩数学会报 41(1916)]．

下述定理是值得注意的：

定理 1 設$f(x)\sim\sum A_n(x)\ (\equiv\mathfrak{S}[f;x])\ (0<\alpha<1)$，則当$A_n(x)=o(n^{-\alpha})$时，关系

$$(C)\qquad\qquad \mathfrak{S}[f;x]=f(x)\ (C,-\alpha)$$

是f在点x的一个地方性(局部性)．

这个命題含在下面的定理中：

定理 2 在定理1中的情况下，当哈戴-立脱尔伍德的条件

$$\int_0^t\varphi_x(u)\,du=o(t)$$

成立时，(C)可求和的充要条件是

$$A_n(x)=o(n^{-\alpha})$$

以及

$$(C_1)\qquad \int_0^\delta \varphi_x(t)\left(1-\frac{t}{\delta}\right)\frac{\sin(n;\,t)}{t^{1-\alpha}}\,dt=o(n^{-\alpha}),$$

这里 $\varphi_x(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)-2S\},\ 0<\delta<\pi,$

$$(n,\,t)=\left(n+\frac{1-\alpha}{2}\right)t+\frac{\alpha\pi}{2}.$$

这是波山桂和奥福特(A. C. Offord)的定理,見倫敦数学会志第40卷(1936).

【証明】 由本章§3定理2, $A_n(x)=o(n^{-\alpha})$ 对于 (C) 求和是必要的.

现在分解(C)求和的内容于下. 置 $K_n^{-\alpha}(t)=Q_n^{-\alpha}(t)+R_n^{-\alpha}(t)$,

$$Q_n^{-\alpha}(t)=\frac{\sin(n;\,t)}{(-\alpha)_n\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{1-\alpha}}.$$

从§10, 我們見到 $\int_0^t \varphi_x(u)\,du=o(t)$ 含有

$$\int_0^\pi \varphi_x(t)\,R_n^{-\alpha}(t)\,dt=o(1).$$

因此, (C) 求和等价于

$$(C_2)\qquad \int_0^\pi \varphi_x(t)\,Q_n^{-\alpha}(t)\,dt=o(1).$$

从而我們只要証明此式等价于

$$(C_3)\qquad \int_0^\pi \varphi_x(t)\,t^{\alpha-1}\sin\,(n;\,t)\,dt=o(n^{-\alpha})$$

以及証明后者等价于(C_1)就够了.

証明(C_3)和(C_2)等价,就是要証 $I=o(n^{-\alpha})$, 这里

$$I=\int_0^\pi \varphi_x(t)\,h(t)\,\sin\,(n;\,t)\,dt,$$

$$h(t)=\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha-1}-t^{\alpha-1}\quad(0<t\leqslant\pi).$$

由于$\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha-1}$ 等于

$$t^{\alpha-1}\left[1-\frac{t^2}{24}+\cdots\right]^{\alpha-1}=t^{\alpha-1}\left(1+\frac{1-\alpha}{24}\,t^2+\cdots\right),$$

所以

$$h(t)=\frac{1-\alpha}{24}t^{1+\alpha}+\cdots,\quad h'(t)=O(1),\quad h''(t)\in L(0,\pi).$$

写着

$$\varphi_x(t)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nt,\quad A_{-n}=A_n,$$

$$2\cos\nu t\sin(n;t)=\sin(n-\nu;t)+\sin(n+\nu;t),$$

我們見到:

$$h(0)=0,\quad \cos(n-\nu;\pi)=\cos\left(n-\nu+\frac{1}{2}\right)\pi=0,$$

$$2I=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}A_\nu\int_0^\pi h(t)\sin(n-\nu;t)dt$$

$$=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}A_\nu\int_0^\pi h'(t)\frac{\cos(n-\nu;t)}{n-\nu+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}dt$$

$$=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}A_\nu\left[h'(t)\frac{\sin(n-\nu;t)}{\left(n-\nu+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right]_0^\pi$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}A_\nu\int_0^\pi h''(t)\frac{\sin(n-\nu;t)}{\left(n-\nu+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)^2}dt.$$

由是 $I=O(|A_n|)+O(\sum'|A_\nu|(n-\nu)^{-2})$，这里 $\sum'$ 表示 $\nu\neq n$. 由于

$$\max_{\frac{n}{2}<\nu<2n}|A_\nu|=o(n^{-\alpha}),$$

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\left[\frac{n}{2}\right]}|A_\nu|(\nu-n)^{-2}\leqslant\frac{2}{n}\left\{\sum_{\nu=-\infty}^{-1}|\nu|^{-\alpha-1}+4\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\nu^{-\alpha-1}\right]=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\sum_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{2n}{}'|A_\nu|(\nu-n)^{-2}\leqslant o(n^{-\alpha})2\sum_{\nu=1}^{2n}\nu^{-2}=o(n^{-\alpha}),$$

$$\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}|A_\nu|(\nu-n)^{-2}=O\left(\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}\nu^{-2-\alpha}\right)=O(n^{-1-\alpha}),$$

所以 $I=o(n^{-\alpha})$.

最后証明 (C_3) 与 (C_1) 等价. 这就是要証明

$$\int_0^\delta\varphi_x(t)\frac{t}{\delta}\frac{\sin(n;t)}{t^{1-\alpha}}dt+\int_\delta^\pi\varphi_x(t)\frac{\sin(n;t)}{t^{1-\alpha}}dt=o(n^{-\alpha}).$$

或是，写着 $\chi(t)=t^{\alpha}\min(t^{-1},\delta^{-1})$，

$$J=\int_0^{\pi}\varphi_x(t)\chi(t)\sin(n;t)\,dt=o(n^{-\alpha}).$$

这个积分，可以用处理 I 的方法来处理，就得到

$$2J=\sum{}' A_\nu\int_0^{\pi}\chi'(t)\frac{\cos(n-\nu;t)}{n-\nu+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}dt+o(n^{-\alpha})$$

$$=\sum{}' A_\nu\int_0^{\delta}+\sum{}' A_\nu\int_\delta^{\pi}+o(n^{-\alpha})$$

$$=O\left(\sum{}'\frac{|A_\nu|}{|n-\nu|^{1+\alpha}}\right)+J'+o(n^{-\alpha}),$$

这里

$$J'=\sum{}' A_\nu\left[\chi'(t)\frac{\sin(n-\nu;t)}{\left(n-\nu+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right]_\delta^{\pi}$$

$$-\sum{}' A_\nu\int_\delta^{\pi}\chi''(t)\frac{\sin(n-\nu;t)}{\left(n-\nu+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)^2}dt$$

$$=O\left(\sum{}'\frac{|A_\nu|}{|n-\nu|^{1+\alpha}}\right)=o(n^{-\alpha}).$$

从而 $J=o(n^{-\alpha})$. 証明完毕.

定理 3 定理 2 中的 (C_1) 可用

$$(C')\quad \lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}n^{\alpha}\varphi_x(t)\left(1-\frac{t}{\delta}\right)\frac{\sin(n;t)}{t^{1-\alpha}}dt\right|=0$$

来代，而 (C') 含在

$$(C'')\quad \lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to\infty}\left|n^{\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\varphi_x(t)\frac{\sin(n;t)}{t^{1-\alpha}}dt\right|=0$$

中——(C'') 成立的話，(C') 成立.

【証明】 由于

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\varphi_x(t)\left(1-\frac{t}{\delta}\right)\frac{\sin(n;t)}{t^{1-\alpha}}dt$$

$$=\left[\left(1-\frac{t}{\delta}\right)\frac{\sin(n;t)}{t^{1-\alpha}}\int_0^t\varphi_x(u)\,du\right]_0^{\frac{1}{n}}$$

$$-\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^t \varphi_x(u)\,du\frac{d}{dt}\left\{\left(1-\frac{t}{\delta}\right)\frac{\sin(n;t)}{t^{1-\alpha}}\right\}dt$$

$$=o(n^{-\alpha})+\int_0^{\frac{1}{n}} o(t)\,\{O(t^{\alpha-1})+O(nt^{\alpha-1})+O(t^{\alpha-2})\}dt$$

$$=o(n^{-\alpha}),$$

所以(C_1)可用(C')来代．

写着 $H(t)=\max\left(1-\frac{t}{\delta},0\right)$，那末$(C')$可以改写为

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\left|n^\alpha\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\varphi_x(t)H(t)\frac{\sin(n;t)}{t^{1-\alpha}}\,dt\right|=0.$$

定义 $H(-t)=H(t)=H(2\pi+t)$ 的話，$H(t)$ 的富理埃展开是

$$H(t)=\sum c_\nu\cos\nu t=\frac{\delta}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-\cos\nu\delta}{\delta\nu^2}\cos\nu t.$$

从而

$$L=\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\varphi_x(t)H(t)\frac{\sin(n;t)}{t^{1-\alpha}}\,dt$$

$$=\sum_{|\nu|<\frac{1}{2}n}c_\nu\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\varphi_x(t)\frac{\sin(n+\nu;t)}{2t^{1-\alpha}}\,dt$$

$$+\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\varphi_x(t)\sum_{\nu>\frac{n}{2}}c_\nu\cos\nu t\,\frac{\sin(n;t)}{t^{1-\alpha}}\,dt=L_1+L_2.$$

由假設，对于 $\varepsilon>0$ 有 $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)$，当 $\delta<\delta_0$ 时，有 $n_0=n_0(\delta,\varepsilon)$，可使

$$\left|\int_{\frac{1}{n}}^{\delta}\varphi_x(t)\frac{\sin(n;t)}{t^{1-\alpha}}\,dt\right|<\varepsilon n^{-\alpha}$$

当 $n>n_0$ 时成立．因此，$2|L_1|$ 小于

$$\sum_{|\nu|<\frac{n}{2}}|c_\nu|\,\varepsilon(n+\nu)^{-\alpha}<2\,\varepsilon n^{-\alpha}\sum|c_\nu|<2\,\varepsilon n^{-\alpha}A,$$

事实上，$\sum|c_\nu|<A\sum\limits_{\nu\le\delta^{-1}}\delta+A\sum\limits_{\nu>\delta^{-1}}\delta^{-1}\nu^{-2}<2A$．因此，

$$L_1=o(n^{-\alpha}).$$

写着 $L_2=L'+L''=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{p}{n}}+\int_{\frac{p}{n}}^{\delta}$，我們見到

$$|L''|\leqslant\int_{\frac{P}{n}}^{\delta}|\varphi_x(t)|t^{\alpha-1}\cdot\left|\sum_{\nu>\frac{1}{2}n}c_\nu\cos\nu t\right|dt$$

$$<A\int_{\frac{P}{n}}^{\delta}\frac{|\varphi_x(t)|}{t^{1-\alpha}}\sum_{\nu>n}\frac{1}{\delta\nu^2}dt<\frac{A}{\delta}P^{\alpha-1}n^{-\alpha}\int_0^{\delta}|\varphi_x(t)|dt.$$

取 P 足够大,使 $|L''|<A_1\varepsilon n^{-\alpha}$. 固定 δ 以及 P 的話,

$$|L'|<\frac{A}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{P}{n}}|\varphi_x(t)|t^{\alpha-1}dt<An^{-\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{P}{n}}|\varphi_x(t)|dt=o(n^{-\alpha}).$$

由是 $L=L_1+L'+L''=o(n^{-\alpha})$. 証明完毕.

当 $f(\theta+h)-f(\theta)=O(|h|^\alpha)$ $(\alpha>0)$ 对于任何 θ 和 h 成立时(f 是周期函数),記做 $f(\theta)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$. 在 $\alpha>1$ 的情况,易知 f 是一常数. 假如 $f(\theta)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqslant1)$, 那末

$$\mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)\,(C,\ -\alpha+\delta)$$

对于任一正数 δ 成立. 这是齐革蒙特于 1925 年指出的. 但是哈戴和立脱尔伍德于 1928 年拓广成如下的結果[(德国) Math. Zeits. 28]: 設 $0<\alpha\leqslant1$, $\alpha p>1$, 那末上述齐革蒙特的結果当

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta+h)-f(\theta)|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}=O(|h|^\alpha)$$

时就成立.

14. 共軛級数的和

由于 $\mathfrak{S}[f]$ 的 $\bar{\mathfrak{S}}[f]$ 未必是一富理埃級数,所以許多有关 $\bar{\mathfrak{S}}[f]$ 的問題,需要特別处理. 例如从 $\int_0^t|\psi_\theta(u)|du=o(t)$ 只能导出: 当 $\alpha>0$ 时,成立着

$$\bar{\sigma}_n^\alpha(\theta)-\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{a}{n}}^{\pi}\psi_\theta(t)\frac{dt}{2\tan\frac{t}{2}}\right\}=o(1).$$

由是可知: 假如极限 $\lim\bar{\sigma}_n^\alpha(\theta)$ 对于某一 α 存在, 那末当 $\beta>0$ 时, $\lim\bar{\sigma}_n^\beta(\theta)$ 存在. 事实上, $\lim\bar{\sigma}_n^\alpha$ 的存在,含有积分

$$\bar{f}(\theta)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi_\theta(t)\frac{dt}{2\tan\frac{t}{2}}=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(\theta+t)-f(\theta-t)}{2\tan\frac{t}{2}}dt$$

的存在．这个結果，在 §8 中曾用解析函数的方法加以証明，现在用实函数的理論，建立如下的

定理 1 設 $f(\theta+2\pi)=f(\theta)\in L(0,\ 2\pi)$．那末主値积分

$$\tilde{f}(\theta)=-\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{f(\theta+t)-f(\theta-t)}{2\tan\dfrac{t}{2}}\,dt$$

几乎处处存在．

【証明】 我們不妨假設 f 在 $[0,\ 2\pi]$ 上积分 $\pi a_0=0$；事实上，从

$$f(\theta+t)-f(\theta-t)=\left[f(\theta+t)-\frac{a_0}{2}\right]-\left[f(\theta-t)-\frac{a_0}{2}\right]$$

知道：a_0 不影响于 $\tilde{f}(\theta)$ 的存在．設 $0<\varepsilon<\pi$，$\int_0^t f(\theta+t)\,dt=F(\theta+t)$，那末积分

$$F_{\varepsilon}(\theta)=\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{F(\theta+t)+F(\theta-t)-2F(\theta)}{\left(2\sin\dfrac{t}{2}\right)^2}\,dt$$

等于

$$\frac{F(\theta+\varepsilon)+F(\theta-\varepsilon)-2F(\theta)}{2\tan\dfrac{\varepsilon}{2}}+\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{f(\theta+t)-f(\theta-t)}{2\tan\dfrac{t}{2}}\,dt.$$

当 $\varepsilon\to0$ 时，第一項几乎处处接近于 $F'(\theta)-F'(\theta)=0$．因此，我們只要証明极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}F_{\varepsilon}(\theta)$ 几乎处处存在就好了．

当 $f\in L^2$ 时，易証 $F_{+0}(\theta)$ 处处存在；設 $f(\theta)\sim\sum\limits_{1}^{\infty}A_n(\theta)$，則

$$\frac{F(\theta+2t)+F(\theta-2t)-2F(\theta)}{4t^2}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\theta)\left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^2,$$

由于

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^2dt=\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2dv<\frac{1}{n}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2dv=\frac{A}{n},$$

$$A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|A_n|}{n}\leqslant A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2(\theta)<\infty,$$

所以 $F_0(\theta)$ 存在．

固定正整数 k，記 $\left|\dfrac{F(\theta+h)-F(\theta)}{h}\right|\leqslant k$ 当 $h<\dfrac{1}{k}$ 时成立的一切 $\theta\in[0,\ 2\pi]$ 所成的点集为 E_k，那末

$$|E_k|\leqslant|E_{k+1}|\to 2\pi.$$

固定 k, 取 E_k 的一个閉子集 P, 使 $|E_k-P|$ 很小. 假如証得 $F_{+0}(\theta)$ 在 P 上几乎处处存在,那末, 由于 $|P|$ 很近于 $|E_k|$, $|E_k|$ 可以很近于 2π, 定理就証毕.

設 $F(\theta)=F_1(\theta)+F_2(\theta)$; 在 P 上, $F(\theta)=F_1(\theta)$, 在 P 的任一余区間上, $F_1(\theta)$ 是綫性的. 那末我們能証 $F_1(\theta)\in \mathrm{Lip}\,1$. 事实上,我們能証有常数 A 适合

$$|F_1(\theta+h)-F_1(\theta)|\leqslant A|h| \quad \left(|h|\leqslant\frac{1}{k}\right).$$

不妨假設 $h>0$. 当 θ 和 $\theta+h$ 都属于 P 时,上式显然成立,此时 $A=k$. 又若 $P\cdot(\theta,\ \theta+h)=0$, 那末 $(\theta,\ \theta+h)$ 含在 P 的一个余区間中, 此时取 $A=k$ 的話,不等式

$$|F_1(\theta+h)-F_1(\theta)|\leqslant Ah \quad \left(h\leqslant\frac{1}{k}\right)$$

又成立. 假如 $P\cdot(\theta,\ \theta+h)\neq 0$, 那末存在如下的 h_1 和 h_2:

$$P\cdot(\theta,\ \theta+h_1)=0,\quad \theta+h_1\in P,\quad \theta+h_2\in P,\quad P\cdot(\theta+h_2,\ \theta+h)=0,$$

因此,

$$\begin{aligned}F_1(\theta+h)-F_1(\theta)&=[F_1(\theta+h)-F_1(\theta+h_2)]\\&\quad+[F_1(\theta+h_2)-F_1(\theta+h_1)]+[F_1(\theta+h_1)-F_1(\theta)],\end{aligned}$$

而其絕对值小于 $3A|h|$. 由是, $F_1(\theta)\in \mathrm{Lip}\,1$.

当 $\theta\in P$ 时, $F_2(\theta)=0$. 假如 $\theta\,\overline{\in}\,P$, 那末, θ 与 P 的距离是 $\chi(\theta)$ 的話, $\theta+\chi(\theta)=\theta'\in P$. 从

$$F_2(\theta)=F_2(\theta)-F_2(\theta')=[F(\theta)-F(\theta')]-[F_1(\theta)-F_1(\theta')]$$

得 $|F_2(\theta)|\leqslant 2A\chi(\theta)$. 由于 $F_1(\theta)\in \mathrm{Lip}\,1$, 所以 $F_1'(\theta)\in L^2(0,\ 2\pi)$. 从而极限 $\lim F_{1\varepsilon}(\theta)$ $(\varepsilon\to 0)$ 几乎处处存在. 我們还要証明 $\lim F_{2\varepsilon}(\theta)$ 在 P 中几乎处处存在,这里

$$F_{2\varepsilon}(\theta)=\int_\varepsilon^\pi \frac{F_2(\theta+t)+F_2(\theta-t)-2F_2(\theta)}{\left(2\sin\frac{1}{2}t\right)^2}\,dt,$$

$$\lim_{s\to0}|F_{2s}(\theta)|\leqslant 2A\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\chi(\theta+t)}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2}dt$$

$$=2A\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\chi(t)\,dt}{\left(2\sin\frac{\theta-t}{2}\right)^2}\leqslant\frac{\pi^2A}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\chi(t)\,dt}{(\theta-t)^2}.$$

末了这个积分 $I(\theta)$ 的存在問題，是我們所要考虑的．在 P 上，$\chi(t)=0$，所以

$$\int_P I(\theta)d\theta=\int_P d\theta\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\chi(t)}{(\theta-t)^2}dt=\int_{[-\pi,\pi]-P}\chi(t)\int_P\frac{d\theta}{(\theta-t)^2}dt.$$

当 t 属于 P 的一个余区間 (α,β) 时，注意到 $\min(t-\alpha,\beta-t)=\chi(t)$，那末

$$\int_P\frac{d\theta}{(\theta-t)^2}<2\int_{\chi(t)}^{\infty}\frac{du}{u^2}=\frac{2}{\chi(t)}.$$

从而

$$\int_P d\theta\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\chi(t)}{(\theta-t)^2}dt<2\int_{[-\pi,\pi]}dt=4\pi.$$

由是可知 $I(\theta)$ 在 P 上几乎处处存在．因此，$\lim F_{2s}(\theta)$ 在 P 上几乎处处存在．定理証明完毕．

从定理 1，我們可述

定理 2 除开一个零集中的点，当 $\alpha>0$ 时，成立着

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\sigma}_n^{\alpha}(\theta)=\tilde{f}(\theta)\quad(C,\alpha);$$

这里 $\tilde{f}(\theta)$ 表示 $f(\theta)$ 的共轭函数，$\tilde{\sigma}_n^{\alpha}(\theta)$ 是 $\tilde{\mathfrak{S}}[f]$ 的蔡查罗平均数．

当 $\alpha=1$ 时，定理 2 是濮賴斯耐首先証明的[1923 年，作者在基沈(Giessen)大学的学位論文]．至于

$$\tilde{\mathfrak{S}}[f;\theta]=\tilde{f}(\theta)\,(C)$$

成立的充要条件是 1925 年哈戴和立脫尔伍德所发現的(倫敦数学会志 Proc. L. M. S. (2) 24)，他們的定理如下．

定理 3 設 $f(\theta+2\pi)\equiv f(\theta)\in L_2(0,2\pi)$，則 $\tilde{\mathfrak{S}}[f;\theta]=\tilde{f}(\theta)(C)$ 成立的充要条件是

$$(C) \qquad \lim_{\varepsilon\to+0} -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \psi_\theta(t)\cot\frac{1}{2}t\,dt = \tilde{f}(\theta)\,(C).$$

此式的意义是存在如下的正整数 r:

$$\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\int_0^t\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2}\cdots\int_0^{t_{r-1}}\int_{t_r}^{\pi}\psi_\theta(u)\cot\frac{1}{2}u\,du\,dt_r dt_{r-1}\cdots dt_1 = 2\pi\tilde{f}(\theta)$$

或是

$$\lim_{\varepsilon\to0} -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\psi_\theta(t)\cot\frac{t}{2}\,dt = \tilde{f}(\theta)\,(C,\ r).$$

由是,当 $\int_{+0}^{\pi}\chi(u)du$ 存在时,$\int_{\varepsilon}^{\pi}\chi(u)du\to\int_{+0}^{\pi}\chi(u)du(C,\ 0)$;又若加上 $u\chi(u)=o(1)\ (u\to0)$,那末 $\int_{\varepsilon}^{\pi}\chi(u)du\to\int_{+0}^{\pi}\chi(u)du(C,\ -1)$.

写着 $B_n(\theta)=a_n\sin n\theta-b_n\cos n\theta$,我們見到 $\psi_\theta(t)\sim\sum B_n(\theta)\sin nt$. 定理 3 还可以改述如下:$\sum B_n(\theta)=\tilde{f}(\theta)\,(C)$ 的充要条件是 (C).

証明定理之前,建立几个引理,首先引入下面的記号:

$$\psi_0^*(t)=\psi(t),\ \psi_1^*(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\psi_0^*(u)du,\ \cdots,\ \psi_r^*(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\psi_{r-1}^*(u)du.$$

引理 1 設 $0\leqslant i\leqslant r$, $a>0$. 当整数 $\nu=i$ 时,假如

$$\int_0^a\frac{\psi_\nu^*(t)}{t}dt(C,\ r-\nu)$$

存在,那末当 $\nu=0,1,\cdots,r,r+1$ 时都存在.

【証明】 設 $h(t)\in L(\varepsilon,\ a)\ (0<\varepsilon<a)$,写着

$$j(\varepsilon)=\int_{\varepsilon}^{a}h(t)t^{-1}dt,$$

則当 $\varepsilon<\delta<a$ 时,由第二中值定理,

$$j(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\delta'}h(t)dt+\int_{\delta}^{a}h(t)t^{-1}dt,$$

这里 $\varepsilon<\delta'<\delta$. 假如 $\int_{+0}^{a}h(t)dt$ 存在,那末先取 δ,次取 ε;当 $\varepsilon\to0$ 时,从上式得到 $\varepsilon j(\varepsilon)\to0$.

置 $J(\varepsilon)=\int_{\varepsilon}^{a}t^{-2}\int_0^t h(u)du\,dt$,我們要証

$$J(\varepsilon)\to J(C,\ r-1)$$

九
乙

等价于 $$j(\varepsilon)\to A+\frac{1}{a}\int_0^\varepsilon h(t)dt(C,\ r).$$

事实上，$0<\eta<\varepsilon$ 的話，于

$$\int_\eta^\varepsilon j(u)du=\int_\eta^\varepsilon\int_u^a\frac{h(t)}{t}\,dt\,du=\left[u\int_u^a\frac{h(t)}{t}\,dt\right]_\eta^\varepsilon-\int_\eta^\varepsilon u\left(\int_u^a\frac{h(t)}{t}\,dt\right)'du,$$

令 $\eta\to0$，就得到

$$\int_0^\varepsilon j(u)du=\varepsilon j(\varepsilon)+\int_0^\varepsilon h(t)dt.$$

利用分部积分法，$J(\varepsilon)$ 等于

$$\left[-\frac{1}{t}\int_0^t h(t)dt\right]_\varepsilon^a+j(\varepsilon)=-\frac{1}{a}\int_0^a h(t)dt+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon j(t)dt.$$

由是

$$J(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon j(t)dt-\frac{1}{a}\int_0^a h(t)dt.$$

从这个等式，我們就能断言：$J(\varepsilon)$ 可用 $(C,\ r-1)$ 法求值等价于 $j(\varepsilon)$ 可用 $(C,\ r)$ 求值，两值的差是 $\frac{1}{a}\int_0^a h(t)dt$.

由是，$\int\frac{\psi_0^*(t)}{t}dt\,(C,\ r)$ 的存在等价于 $\int\frac{\psi_1^*(t)}{t}dt(C,r-1)$ 的存在，等等；因此，它等价于 $\int\frac{\psi_r^*(t)}{t}dt(C,\ 0)$ 的存在．后者指出极限

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^a\frac{\psi_r^*(t)}{t}\,dt=\int_{+0}^a\frac{\psi_r^*(t)}{t}\,dt$$

的存在．因此，从

$$\int_0^\varepsilon\int_u^a\frac{\psi_r^*(t)}{t}\,dt\,du=\varepsilon\int_\varepsilon^a\frac{\psi_r^*(t)}{t}\,dt+\int_0^\varepsilon\psi_r^*(t)dt$$

得到 $\int_0^\varepsilon\psi_r^*(t)dt=o(\varepsilon)$，或是 $\psi_{r+1}^*(t)t^{-1}=o(t^{-1})$．因此，

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon\frac{\psi_{r+1}^*(t)}{t}\,dt(C,\ -1)$$

存在．証明完毕．

現在假設 $\psi(t)\in L^2(0,\ \pi)$．写着

$$\psi_0(t)=\psi(t),\ \psi_1(t)=\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}\int_0^t\psi_0(u)du+\gamma_1\sin^3 t,$$

$$\psi_2(t)=\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}\int_0^t \psi_1(u)du+\gamma_2\sin^3 t, \cdots,$$

这里 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$都是常数. 由于

$$\psi_s(t)-\psi_s^*(t)=\left(\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}-\frac{1}{t}\right)\int_0^t \psi_{s-1}(u)du$$

$$+\frac{1}{t}\int_0^t [\psi_{s-1}-\psi_{s-1}^*]du+\gamma_s\sin^3 t.$$

所以 $\psi_1(t)-\psi_1^*(t)=o(t^2)$. 因之 ψ_1 和 ψ_1^* 同时存在,或都不存在;同时存在的話,成立着

$$\psi_2(t)-\psi_2^*(t)=o(t^2).$$

从而 ψ_2 和 ψ_2^* 同时存在或都不存在. 一般地說:假如 ψ_{s-1} 和 ψ_{s-1}^* 都存在,那末从

$$\psi_s(t)-\psi_s^*(t)=o(t^2),$$

可以断言 ψ_s 和 ψ_s^* 同时存在或都不存在. 由是可知:引理1中的 ψ_ν^* 可以改写成 ψ_ν.

引理 2 于 $\psi_1, \psi_2, \cdots$ 的定义中的 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$, 取适当的数,可使一切积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi_s(t)\cot\frac{t}{2}\,dt=J_s(C,\ r-s)$$

$$(s=0,\ 1,\ \cdots,\ r+1)$$

的值都相等,但設其中有一个(比方說 J_s)存在的話.

【証明】 我們只要証明: J_0 依(C,r)存在的条件是 J_1 依$(C,r-1)$存在,并且 $J_0=J_1$.

設 $\Psi(t)=\int_0^t \psi(u)du$, 則当 $N>n$ 时, $\sum_{\nu=n}^N \frac{B_\nu}{\nu}$ 等于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi \psi(t)\sum_{\nu=n}^N \frac{\sin \nu t}{\nu}\,dt=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi \Psi(t)\sum_{\nu=n}^N \cos \nu t\,dt$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\Psi(t)dt.$$

由于 $\psi\in L^2$, 故当 $N\to\infty$ 时,我們得到

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\cot\frac{t}{2}\,\Psi(t)\,dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi(t)\cos nt\,dt.$$

末項是偶函数 $-\frac{1}{2}\Psi(t)$ 的富理埃系数 α_n;

$$-\frac{1}{2}\Psi(t)\sim\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nt.$$

而第一項等于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_1(t)\sin nt\,dt-\frac{\gamma_1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3 t\sin nt\,dt=\beta_{1n}+\delta_n,$$

由是 $\frac{B_n}{n}+\frac{B_{n+1}}{n+1}+\cdots=\beta_{1n}+\alpha_n+\delta_n$. 由于 $\psi(t)\sim\sum B_n\sin nt$, $\Psi(t)=\int_0^t\psi(u)du$, 所以

$$-\frac{1}{2}\Psi(t)=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{2n}\cos nt,$$

从而 $\frac{1}{2}\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\cdots=0(C,\ -1)$. 或是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu}(C,\ -1).$$

显然地, $\delta_1=-\frac{3}{4}\gamma_1$, $\delta_3=\frac{1}{4}\gamma_1$, $\delta_n=0\,(n\neq 1,\ 3)$; 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n=-\frac{1}{2}\gamma_1(C,\ -1).$$

现在取 γ_1 等于 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu}$, 則得 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n+\delta_n)=0(C,\ -1)$. 总而言之:

設 $\psi_1(t)\sim\sum\beta_{1n}\sin nt$, $\gamma_1=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu}$, $\beta_n^1=\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu}$, 則

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n^1-\beta_{1n})=0(C,\ -1).$$

将此論法,继續进行,可得如下的結論: 設

$$\psi_s(t)\sim\sum\beta_{sn}\sin nt,\quad \beta_n^s=\sum_{\nu=s}^{\infty}\frac{\beta_{s-1,\nu}}{\nu},$$

則取适当的 $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots$ 可使

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n^s-\beta_{sn})=0(C,\ -1).$$

現在証明

$$(C,\ r)\text{-}\int_0^\pi \psi_0(t)\cot\frac{1}{2}t\,dt = (C,\ r-1)\text{-}\int_0^\pi \psi_1(t)\cot\frac{1}{2}t\,dt.$$

写着

$$k_s(\varepsilon)=\int_\varepsilon^\pi \psi_s(t)\cot\frac{1}{2}t\,dt,\quad K_s(\varepsilon)=\int_0^\varepsilon k_s(t)dt,$$

我們見到

$$K_0(\varepsilon)=\int_0^\varepsilon k_0(t)\sec^2\frac{t}{2}\,dt-\int_0^\varepsilon k_0(t)\tan^2\frac{t}{2}\,dt.$$

末項等于 $\int_0^\varepsilon \frac{1}{t}\tan^2\frac{t}{2}\,o(1)dt=o(\varepsilon^2)$ [見引理 1 中 $\varepsilon j(\varepsilon)=o(1)$ 的証明]. 从而

$$\begin{aligned}K_0(\varepsilon)&=2\int_0^\varepsilon \frac{d}{dt}\tan\frac{t}{2}\int_t^\pi \psi_0(u)\frac{1}{2}\cot\frac{u}{2}\,du\,dt+o(\varepsilon^2)\\&=2\tan\frac{\varepsilon}{2}\int_\varepsilon^\pi \psi_0(u)\frac{1}{2}\cot\frac{u}{2}\,du+\int_0^\varepsilon \psi_0(u)du+o(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

另一方面,

$$k_1(\varepsilon)=\int_\varepsilon^\pi \frac{1}{4}\cot^2\frac{t}{2}\int_0^t \psi_0(u)du\,dt+\frac{\gamma_1}{2}\int_\varepsilon^\pi \cot\frac{t}{2}\sin^2 t\,dt.$$

末項等于 $\frac{\pi}{4}\gamma_1+o(\varepsilon)$. 从而

$$\begin{aligned}k_1(\varepsilon)&=\int_\varepsilon^\pi \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{t}{2}\int_0^t \psi(u)du\,dt\\&\quad-\frac{1}{4}\int_\varepsilon^\pi\int_0^t \psi(u)du\,dt+\frac{\pi}{4}\gamma_1+o(\varepsilon)\\&=\frac{1}{2}\cot\frac{\varepsilon}{2}\int_0^\varepsilon \psi(u)du+\int_\varepsilon^\pi \frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}\,\psi(t)dt\\&\quad-\frac{\pi}{4}\sum\frac{B_n}{n}+\frac{\pi}{4}\gamma_1+o(\varepsilon).\end{aligned}$$

結合起来,我們得到

$$k_1(\varepsilon)-\frac{1}{2}\cot\frac{\varepsilon}{2}\,K_0(\varepsilon)=o(\varepsilon).$$

因此, $k_1(\varepsilon)-\frac{1}{\varepsilon}K_0(\varepsilon)=o(1)$. 由是即得所要的等式. 証明完毕.

【定理3的証明】 我們知道：級数 $\sum w_\nu$ 可用 (C, α) 法求和的充要条件是級数 $\sum\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} w_\nu \nu^{-1}\right)$ 可用 $(C, \alpha-1)$ 法求和，但 $\alpha=0, 1, \cdots$（§11引理7）．当 $\tilde{\mathfrak{S}}[f; \theta]$ 可用 (C) 法求和时，存在如下的 r：

$$\sum \beta_n^0 = s_0(C, r),$$

这里 $\beta_n^0 = B_n$，s_0 表示和．从而 $\sum \beta_n^1 = s_1(C, r-1)$，并且

$$\sum \beta_{1n} = s_1(C, r-1).$$

如是逐步前进，得到 $\sum \beta_{r+1, n} = s_{r+1}(C, -1)$；但 $\beta_{r+1, n}$ 表示 ψ_{r+1} 的系数，簡写着 $\beta_{r+1, n} = b_n$，那末 $\sum b_n$ 收斂，$nb_n = o(1)$，并且积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi_{r+1}(t) \cot \frac{t}{2}\, dt$$

收斂．現在証明

$$\int_0^\infty \frac{\psi_{r+1}(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} \sum b_n.$$

設 $\varepsilon > 0$，則

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\psi_{r+1}(t)}{t}\, dt = \sum b_n \int_\varepsilon^\infty \frac{\sin nt}{t}\, dt = \sum b_n \int_{n\varepsilon}^\infty \frac{\sin u}{u}\, du.$$

第 n 項是 $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$，級数絶对收斂．置

$$S(\varepsilon) = \sum b_n \int_0^{n\varepsilon} \frac{\sin u}{u}\, du = \sum b_n \left(\frac{\pi}{2} - \int_{n\varepsilon}^\infty \frac{\sin u}{u}\, du\right),$$

对于 ε，取如下的 N：$\frac{\pi}{2} < \varepsilon N < \pi$，固定着 N，取 $\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] = M$，那末，当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\sum_{n=1}^{M} b_n \int_0^{n\varepsilon} \frac{\sin u}{u}\, du = \int_0^{M\varepsilon} \frac{\sin u}{u}\, du \sum_{n=M'}^{M} b_n = o(1),$$

$$\sum_{n=M+1}^{N} b_n \int_0^{n} \frac{\sin u}{u}\, du = \int_0^{N\varepsilon} \frac{\sin u}{u}\, du \left(\left|\sum_{n=M}^{N} b_n\right|\right) = o(1),$$

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n = o(1),$$

$$-\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n \int_{n\varepsilon}^\infty \frac{\sin u}{u}\, du = o\left(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{\varepsilon N}\right) = o(1).$$

加起来就得到 $S(\varepsilon) = o(1)$．由是建立了上面等式．

由于 $\psi_{r+1}(t)\equiv\psi_{r+1}(t+2\pi)$，所以

$$\int_0^\infty \frac{\psi_{r+1}(t)}{t}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\psi_{r+1}(t)}{t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\psi_{r+1}(t)}{t}\,dt+\frac{1}{2}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}'\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\psi_{r+1}(t)\,dt}{t+2\nu\pi}.$$

在区間 $-\pi\leqslant t\leqslant\pi$ 上，$\displaystyle\sum_{\nu=-n}^{-1}{}'\frac{1}{t+2\nu\pi}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{t+2\nu\pi}$ 匀斂于

$$\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}-\frac{1}{t},$$

从而

$$\int_0^\infty \frac{\psi_{r+1}(t)}{t}\,dt=\int_0^\pi \frac{\psi_{r+1}(t)\,dt}{\tan\frac{t}{2}}.$$

这样，我們建立了等式

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\psi_{r+1}(t)}{\tan\frac{t}{2}}\,dt=\sum b_n.$$

由引理 2，积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\psi_0(t)}{\tan\frac{t}{2}}\,dt\,(C,\ r+1)$$

存在。

倒轉来說，当积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\psi_0(t)}{\tan\frac{t}{2}}\,dt\,(C,\ r)$$

存在时，由引理 2，存在着

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\psi_{r+1}(t)}{\tan\frac{t}{2}}\,dt\,(C,\ -1).$$

这就是說，此积分收斂，并且当 $t\to0$ 时，$\psi_{r+1}(t)=o(1)$. 因此，

$$\sum\beta_{r+1,n}=s(C,\ 1),$$

s 表示級数的和. 从而 $\sum B_n(C,\ r+2)$ 存在. 定理証毕.

定理 4 定理 3 中的条件 $f(\theta)\in L_2(0,\ 2\pi)$ 可以减輕为

$$f(\theta)\in L(0,\ 2\pi).$$

首先証明

引理 3 設 $j(t)=\int_t^\pi \psi(u)u^{-1}du,\ t>0$, 那末当柯西积分

$$j^{(1)}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t j(u)du,\ \cdots,\ j^{(r)}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t j^{(r-1)}(u)du$$

存在并且 $\lim\limits_{t\to 0} j^{(r)}(t)$ 存在时，函数

$$\psi^{(1)}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \psi(u)du,\ \cdots,\ \psi^{(r)}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \psi^{(r-1)}(u)du$$

都属于 $L(0,\ \pi)$，并且 $\lim\limits_{t\to 0}\psi^{(r+1)}(t)=0$.

【証明】 首先証明 $j(t)\in L(0,\ \pi)$:

$$\int_0^\pi |j|dt\leqslant\int_0^\pi\int_t^\pi \frac{|\psi(u)|}{u}du\,dt=\int_0^\pi \frac{|\psi(u)|}{u}\int_0^u dt\,du=\int_0^\pi|\psi(u)|du.$$

$tj(t)=o(1)$ 是已經証明过的，$tj(t)$ 等于

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(tj)dt=\int_0^t(j-\psi)dt.$$

因此，$j(t)=j^{(1)}(t)-\psi^{(1)}(t)$；或是 $\psi^{(1)}(t)=j^{(1)}(t)-j(t)$. 由假設，$j^{(1)}(t)$ 依柯西意义，可以积分，所以 $\psi^{(1)}(t)$ 也是如此．由是而得

$$\psi^{(2)}(t)=j^{(2)}(t)-j^{(1)}(t).$$

这个論法，可以逐步进行，所以 $\psi^{(\nu)}(t)\ (\nu=1,\ \cdots,\ r)$ 都依柯西意义在 $(0,\ \pi)$ 上可以积分．最后得到

$$\psi^{(r+1)}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t j^{(r)}(u)du-j^{(r)}(t)\to 0\quad(t\to 0).$$

要証 $\psi^{(1)},\ \cdots,\ \psi^{(r)}$ 都属于 $L(0,\ \pi)$，写着

$$t=e^{-x},\ t\psi(t)=F(x),\ t\psi^{(1)}(t)=F_1(x),\ \cdots,$$

在条件 $F_r(x)=o(e^{-x})\ (x\to\infty)$ 和 $\int_x^\infty|F(x')|dx'<\infty$ 下，我們要証勒貝格积分

$$\int_x^\infty F_s(x')dx'\quad(s=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$$

的存在．这些积分，依柯西意义是存在的．当 $x\to\infty$ 时，$F_1(x),\ \cdots,\ F_r(x)$ 都是 $o(1)$；因此我們不妨假設 $|F_s(x)|<1(s=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$.

由假設，

$$F_r(x)=\int_x^\infty F_{r-1}(x')\,dx'=o(e^{-x}).$$

在区間 $\xi<x<2\xi$ 中，适合 $|F_{r-1}(x)|>e^{-\frac{1}{2}\xi}$ 的一切 x 成一开集 E，$E=\sum(X,\ X')$；在任一$(X,\ X')$上，$F_{r-1}(x)\neq 0$. 因此，

$$\int_X^{X'}|F_{r-1}(x)|\,dx=\left|\int_X^{X'}F_{r-1}(x)\,dx\right|\geqslant\int_X^{X'}e^{-\frac{1}{2}\xi}\,dx.$$

从而

$$X'-X\leqslant O\left(e^{-X+\frac{1}{2}\xi}\right)\leqslant Ae^{-\frac{1}{2}\xi}.$$

在区間 $X\leqslant x\leqslant X'$ 上，我們能証

$$(1)\qquad |F_{r-1}(x)|\leqslant e^{-\frac{1}{2}\xi}+\sum_{\nu=1}^{r-2}\frac{(X'-X)^\nu}{\nu!}+\frac{1}{\Gamma(r-1)}\int_X^x(x-y)^{r-2}|F(y)|\,dy.$$

事实上，

$$(2)\qquad F_{r-1}(x)=F_{r-1}(X)-(x-X)F_{r-2}(X)+\cdots+(-1)^{r-2}\frac{(x-X)^{r-2}}{(r-2)!}F_1(X)+(-1)^{r-1}\int_X^x dx_1\int_X^{x_1}dx_2\cdots\int_X^{x_{r-2}}F(x_{r-1})\,dx_{r-1}.$$

末項等于

$$\frac{(-1)^{r-1}}{\Gamma(r-1)}\int_X^x(x-y)^{r-2}F(y)\,dy=\frac{(-1)^{r-2}(x-X)^{r-2}F_1(X)}{\Gamma(r-1)}+\frac{(-1)^{r-2}}{\Gamma(r-2)}\int_X^x(x-y)^{r-3}F_1(y)\,dy.$$

假如 $\xi<X$，那末 $|F_{r-1}(X)|\leqslant e^{-\frac{1}{2}\xi}$. 由是从(2)得着(1). 假如 $\xi=X$，那末 $X'\in E$，从而 $|F_{r-1}(X')|\leqslant e^{-\frac{1}{2}\xi}$；以 X' 代(2)中的 X，我們又得着(1). 因此(1)对于 $X\leqslant x\leqslant X'$ 中任何 x 成立.

当 $r=2$ 时，由(1)得 $|F_1(x)|\leqslant e^{-\frac{1}{2}\xi}+\int_X^{X'}|F(u)|\,du$,

$$\int_\xi^{2\xi}|F_1(x)|\,dx\leqslant\xi e^{-\frac{1}{2}\xi}+\sum_{(X,X')}\int_X^{X'}|F(u)|\,du\cdot(X'-X)+\int_{x\in E}|F_1(x)|\,dx,$$

末項小于$\xi e^{-\frac{1}{2}t}$. 因此,左端的积分小于

$$2\xi e^{-\frac{1}{2}t}+Ae^{-\frac{1}{2}t}\sum_{(X,X')}\int_X^{X'}|F(u)|du<(A+2)\xi e^{-\frac{1}{2}t}.$$

由是可知$|F_1(x)|<\varepsilon(1,\infty)$.

假如$r>2$,那末从(1)得到

$$|F_{r-1}(x)|<e^{-\frac{1}{2}t}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(X'-X)^\nu}{\nu!}$$
$$=e^{-\frac{1}{2}t}+(X'-X)\frac{e^{X'-X}-1}{X'-X}$$
$$<e^{-\frac{1}{2}t}+A(X'-X)<(A+1)e^{-\frac{1}{2}t}<2Ae^{-\frac{1}{4}x},$$

从而$F_{r-1}(x)\in L(1,\infty)$;并且我們还可以导出

$$|F_{r-2}(x)|<Ae^{-\frac{x}{4^2}},$$

等等. 一般地說,$F_s(x)\in L(1,\infty)\ (s=1,2,\cdots,r)$. 証明完毕.

【定理4的証明】 在定理3,我們假設$\psi_0\in L^2(0,\pi)$,从而ψ_1, $\psi_2,\cdots$等函数不但存在,并且都属于$L^2(0,\pi)$. 現在只假設$f\in L$,我們来証明定理3中的事实. 首先从积分

$$\int_0^\pi \psi_0(t)\cot\frac{t}{2}\,dt\ (C) \tag{3}$$

的存在导出級数的用(C)法可以求和. 由假設,存在如下的r:积分

$$j(t)=\int_t^\pi\psi(u)u^{-1}du,\quad j^{(1)}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t j(u)du,\ \cdots,$$
$$j^{(r)}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t j^{(r-1)}(u)du$$

都依柯西的意义存在;当$t\to0$时,$j^{(r)}(t)\to A$. 因此,由引理3,函数

$$\psi^{(1)}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\psi(u)du,\quad \cdots,\quad \psi^{(r)}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\psi^{(r-1)}(u)du$$

都属于$L(0,\pi)$, $\psi^{(r+1)}(t)=o(1)\ (t\to0)$. 这样一来,引理2的証明,仍然有效,积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\frac{\psi_{r+1}(t)}{\tan\frac{t}{2}}dt\ (C,-1)$$

存在. 从而級数

$$\sum \beta_{r+1,n},\ \sum \beta_{r,n},\ \sum \beta_{r-1,n},\ \cdots,\ \sum \beta_{0n}$$

順次依$(C, 1)$, $(C, 2)$, $(C, 3)$, $\cdots$, $(C, r+2)$求和法可以求和. 由于$\beta_{0n}=B_n$, 所以$\sum B_n$可用$(C, r+2)$求和.

我們还要从$\tilde{\mathfrak{S}}[f; \theta]=\tilde{f}(\theta)(C, r+2)$导出积分(3)的存在. 为此,首先建立下述

引理 4 設$g_0(t)\equiv g(t)$是$(-\pi, \pi)$上的奇函数,

$$g(t)\in L(\varepsilon, \pi)\quad (0<\varepsilon<\pi);$$

$$g_r(t)=\int_0^t g_{r-1}(u)du\quad (r=1, 2, \cdots),$$

$$g_0(t)\sim\sum a_n \sin nt.$$

假如$a_n=o(1)$, 并且$\sum a_n=s(C, r)$, 那末$g_{r+2}(t)=o(t^{r+2})$, 并且积分

$$\int_{+0}^{\pi} g_1(t)t^{-1}dt$$

存在.

【証明】 我們不妨假設$\sum a_n=0(C, r)$. 由于$a_n=o(1)$,所以成立着等式

$$g_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}(1-\cos nt).$$

从而

$$g_2(t)=\sum a_n n^{-2}(nt-\sin nt),\quad g_3(t)=\sum a_n n^{-3}\left(\frac{1}{2}n^2t^2-1+\cos nt\right).$$

一般地說, 置$S_k(t)=\left(\int_0^t du\right)^k \sin u$, 則得

$$g_{r+2}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{r+2}}S_{r+2}(nt).$$

由于

$$S_{r+2}(t)=\int_0^t (t-u)^{r+1}\sin u\, du/\Gamma(r+2),$$

所以当$t\to 0$时, $S_{r+2}(t)\leqslant \sin t\cdot t^{r+2}/\Gamma(r+3)<\frac{t^{r+3}}{\Gamma(r+3)}$; 又当$t\to\infty$时, $S_{r+2}(t)\leqslant\frac{t^{r+2}}{\Gamma(r+3)}$.

写着$A_n^0=a_0+\cdots+a_n$, $\cdots$, $A_n^{r+1}=A_0^r+A_1^r+\cdots+A_n^r$,我們見到

$$g_{r+2}(t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n^0\Delta\left[\frac{S_{r+2}(nt)}{n^{r+2}}\right]=\cdots=\sum A_n^r\Delta^{r+1}\left[\frac{S_{r+2}(nt)}{n^{r+2}}\right].$$

我們注意等式

$$\Delta^{r+1}[u_n v_n]=\sum_{k=0}^{r+1} c_{rk}\Delta^k u_n\cdot\Delta^{r+1-k}v_{n+k}$$

中的 c_{rk} 只和 r, k 有关系,因此得到

$$g_{r+2}(t)=\sum_{k=0}^{r+1} c_{rk}\sum_n A_n^r\Delta^k[S_{r+2}(nt)]\cdot\Delta^{r+1-k}[(n+k)^{-2-r}].$$

由于 $S_{r+2}(nt)$ 等于

$$\int_0^{nt}\left[\left(\int_0^u du\right)^{r+1}\sin u\right]du,$$

所以当 $0<nt\leqslant 1$, $k\leqslant r+3$ 时, $\Delta S_{r+2}(nt)=tS_{r+1}(nt\delta)$ $(0<\delta<1)$. 从而得到

$$\Delta^k S_{r+2}(nt)=t^k S_{r+2-k}(nt\eta)\quad(0<\eta<1);$$

因此 $\Delta^k S_{r+2}(nt)=O[t^k(nt)^{r+3-k}]=O[(nt)^{r+3}n^{-k}]$, 这是 $nt\leqslant 1$ 的話. 假如 $nt>1$, 那末 $S_\nu(nt\eta)=O[(nt)^\nu]$, 从而 $\Delta^k S_{r+2}(nt)=O[(nt)^{r+2}n^{-k}]$. 上面有关 $g_{r+2}(t)$ 的等式,依靠着

$$A_n^k\Delta^k\left[\frac{S_{r+2}(nt)}{n^{r+2}}\right]=o(1)\quad(k\leqslant r).$$

这容易从 $\Delta^k[\quad]$ 的估計式获得. 实际上,上式左端等于

$$A_n^k\sum_{\nu=0}^{k} O(n^{r+2-(k-\nu)})O(n^{-r-2-\nu})=O(A_n^k n^{-k})=o(1).$$

现在 $g_{r+2}(t)$ 等于

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{r+1} c_{rk}\sum_n A_n^r\Delta^k[S_{r+2}(nt)]\Delta^{r+1-k}[(n+k)^{-2-r}]\\&\quad=\sum_{k=0}^{r+1} c_{rk}\Big[\sum_{nt\leqslant 1} o(n^r)O(t^{r+3}n^{r+3-k})O(n^{-2r-3+k})\\&\quad\quad+\sum_{nt>1} o(n^r)O(t^{r+1}n^{r+1-k})O(n^{-2r-3+k})\Big]\\&\quad=\sum_{k=0}^{r+1} c_{rk}\Big[t^{r+3}\sum_{nt\leqslant 1} o(1)+t^{r+1}\sum_{nt>1} o(n^{-2})\Big]=o(t^{r+2}).\end{aligned}$$

我們还要証明 $g_1(t)t^{-1}$ 在 $(0,\pi)$ 上依柯西意义可以积分. 設 $\varepsilon>0$, 那末

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} t^{-1}g_1(t)dt=\Big[g_2(t)t^{-1}\Big]_{\varepsilon}^{\pi}+\int_{\varepsilon}^{\pi} t^{-2}g_2(t)dt$$

$$=\Big[g_2(t)t^{-1}+g_3(t)t^{-2}\Big]_{\varepsilon}^{\pi}+2\int_{\varepsilon}^{\pi} t^{-3}g_3(t)dt=\cdots$$

$$=F(\pi)-F(\varepsilon)+(r+1)!\int_{\varepsilon}^{\pi} t^{-2-r}g_{r+2}(t)dt,$$

这里 $F(t)=\sum_{k=1}^{r+1}(k-1)!\,g_{k+1}(t)t^{-k}$, $F(\varepsilon)=o(1)$. 由是,

$$\int_{+0}^{\pi} g_1(t)t^{-1}dt=F(\pi)+(r+1)!\int_{+0}^{\pi} g_{r+2}(t)t^{-r-2}dt.$$

証明完毕.

积分(3)的存在 設 $\Psi(t)=\int_0^t \psi_0(u)du$, 则当 $\sum B_m(C, r)$ 存在时,我們仍能得到

$$\sum_{m=n}^{N}\frac{B_m}{m}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\Psi(t)dt.$$

但是現在沒有 $\psi_0\in L^2$ 的假設,我們不能立刻断言:

$$J(N)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\Psi(t)dt=o(1)$$

而获得 $\sum_{m=n}^{\infty}B_m/m=J(n-1)$. 但是, $J(n)$是 $\mathfrak{S}[\Psi;0]$的部分和; $\mathfrak{S}[\Psi]$ 是$\sum-\frac{B_m}{m}\cos mt$, 其系数是 $o(1)$. 由于 $\Psi(t)$ 的連續性,

$$J(0)+J(1)+\cdots+J(N)=o(N),$$

又因 $B_m/m=o(1/m)$, 所以 $J(N)\to 0$. 从而得到

$$\beta_n^1=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{\beta_{0m}}{m}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\Psi(t)dt.$$

由是,仿效从前的解法,取适当的 γ_1, 可使

$$\sum(\beta_n^1-\beta_{1n})=o(C, -1).$$

将 $\psi_0(t)$ 看做引理 4 中的 $g_0(t)$. 由于 $\sum B_m(C, r)$ 存在, 并且

$B_m=o(1)$，所以从引理 4，知道积分

$$\int_0^\pi \frac{1}{t}\int_0^t \psi_0(u)\,du\,dt=\int_0^\pi \psi^1(u)\,du$$

存在，并且

$$\left(\int_0^t du\right)^{r+2}\psi(u)=o(t^{r+2}).$$

由于 $J(n)=o(1)$，所以 $\psi^1(t)$ 的系数是 $o(1)$：

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi^1(t)\sin nt\,dt=o(1).$$

因此，$\psi^1(t)$ 具有引理 4 中 $g_0(t)$ 的性质，它的系数等价于 β_n^1，而級数 $\sum\beta_n^1$ 依 $(C,\ r-1)$ 可以求和，所以 $\sum\beta_{1n}\ (C,\ r-1)$ 也存在；事实上两級数相差是 0，并且 $\beta_n^1-\beta_{1n}=o\left(\frac{1}{n}\right)$. 由是取适当的 γ_2 可使

$$\sum(\beta_n^2-\beta_{2n})=o\,(C,\ -1).$$

将这套議論重复 r 回，就得着如下的函数 $\psi_0,\ \psi_1,\ \cdots,\ \psi_{r+1}$：积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi_s(t)\cot\frac{t}{2}\,dt\ (C,\ r-s)$$

$$(s=0,\ 1,\ \cdots,\ r+1)$$

中有一个存在，那末个个存在而互相等. 定理 4 証明完毕.

最后，我們添加一些史实，以結束本节.

1° 在上面，我們从 $\mathfrak{S}[f;\ \theta]=\tilde{f}(\theta)\ (C,\ r-1)$ 导出 $J_\theta=\tilde{f}(\theta)\ (C,\ r)$，又从后者导出 $\mathfrak{S}[f;\ \theta]=\tilde{f}(\theta)\ (C,\ r+2)$，这里

$$J_\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\psi_0(t)\,dt}{2\tan\frac{t}{2}}.$$

配賴 (Paley) 对于其中“級 r”有所改进，詳見劍桥哲学会志 Proc. Cambr. Phil. Soc. 33 (1932).

2° 前面关于富理埃級数的 $(C,\ \alpha)$ 求和的一般理論，在共軛級数方面的推广，詳見伐勃冷斯基 (Verblunsky) 以及波山桂 (Bosanquet) 在倫敦数学会志 (Proc. L. M. S.) 1932 和 1934 年的論文.

3° 对于有界函数，有下面的事实：假如 $f(\theta)$ 在点 θ_0 的附近是有界，那末

$$\mathfrak{S}[f;\theta]=\mathfrak{f}(\theta)\,(C,\alpha)\quad(\alpha>0)$$

成立的充要条件是积分 $\mathfrak{f}(\theta)$ 的收斂. 証明見倫敦数学会期刊 6(J. L. M. S. 6, 1931). 著者是哈戴-立脫尔伍德(必要性)以及普拉沙特(B. N. Prasad)(充分性).

4° 积分 $\mathfrak{f}(\theta)$ 的存在含有 $\mathfrak{S}[f;\theta]=\mathfrak{f}(\theta)\,(C,\alpha)$ 当 $\alpha>1$ 时成立. 这是配賴于 1930 年在劍桥哲学会志(Proc. Cambr. Phil. Soc.)上指出的. 后来普拉沙特証明配賴定理中的 $\alpha>1$ 不可以改进为 $\alpha=1$ (意大利的数学年刊(4)第十一卷, 1932).

5° α 是一負数的話 (>-1), $\mathfrak{S}[f;\theta]=\mathfrak{f}(\theta)\,(C,\alpha)$ 是 f 的一个全面性质——不是局部性质, 对于此式的成立, 积分 $\mathfrak{f}(\theta)$ 的收斂是必要的. 詳見巴脫那加(Bhatnagar) 1938 年在倫敦数学会志 (Proc. L. M. S.) 44 中的一篇文章.

第 三 章

富理埃級数的强性求和以及概收斂

1. 富理埃級数的强性求和

設 $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$. 对于 $\sum u_n$, 假如存在正数 k 和常数 S 适合

$$(1)\qquad \frac{|S_0-S|^k+|S_1-S|^k+\cdots+|S_n-S|^k}{n+1}=o(1),$$

那末我們說 $\sum u_n$ 关于指数 k, **强性可和**, S 是和. 指数愈大愈强! 意思是当 (1) 成立时, $0<k'<k$ 的話, $\sum u_n$ 对于指数 k', 也可以强性求和. 事实上, 写着 $p=\frac{k}{k'}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 我們見到

$$\sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu-S|^{k'}\leqslant n^{\frac{1}{q}}\left[\sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu-S|^k\right]^{\frac{1}{p}}=o\left(n^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}\right)=o(n).$$

設 $S_n(\theta)$ 是 $\mathfrak{S}[f]$ 的部分和, 当 $\theta=\theta_0$ 是 $f(\theta)$ 的一个連續点时, 不但費耶的結果

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\{S_\nu(\theta_0)-f(\theta_0)\}=o(1)$$

成立, 下面我們將証(包含在定理 1 中) $\sum_0^n|S_\nu(\theta_0)-f(\theta_0)|=o(n)$; 上

式中諸項，并非由于互相消灭而成 $o(1)$，乃是由于 $|S_\nu(\theta_0)-f(\theta_0)|$ 都不很大，其和不过是 $o(n)$.

定理 1 假如 f 在点 θ 的附近属于 L^2 并且 $\int_0^t |\varphi_\theta(u)|^2 du = o(t)$，那末，$2\varphi_\theta(u)=f(\theta+u)+f(\theta-u)-2f(\theta)$ 的話，

$$\sum_{\nu=0}^{n} |S_\nu(\theta)-f(\theta)|^2 = o(n).$$

这是哈戴-立脱尔伍德的定理，是下面定理 2 的特殊情况.

【証明】 首先証明：当 $\varepsilon_n=o(1)$ 时，$\sum_{\nu=1}^{n}(S_\nu-S)^2=o(n)$ 等价于

$$\sum_{\nu=1}^{n}(S_\nu+\varepsilon_\nu-S)^2=o(n).$$

事实上，

$$\sum_{\nu=1}^{n}\{(S_\nu+\varepsilon_\nu-S)^2-(S_\nu-S)^2\}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu^2+2\sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu(S_\nu-S)=2\sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu(S_\nu+\varepsilon_\nu-S)-\sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu^2.$$

假如 $\sum_{\nu=1}^{n}(S_\nu-S)^2=o(n)$，那末由于第一式的右端是 $o(n)+o(n)=o(n)$，所以 $\sum_{\nu=1}^{n}(S_\nu+\varepsilon_\nu-S)^2=o(n)$. 假如后者成立，那末从第二个等式得到 $\sum_{\nu=0}^{n}(S_\nu-S)^2=o(n)$. 由是，写着 $\mathfrak{S}[f;\theta]\sim\frac{1}{2}A_0(\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\theta)$，

$$S_n^*(\theta)=S_n(\theta)-\frac{1}{2}A_n(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta+t)\cot\frac{t}{2}\sin nt\,dt,$$

我們証明 $\sum_{\nu=1}^{n}|S_\nu^*(\theta)-f(\theta)|^2=o(n)$ 好了. 从这里我們并且明白：关于指数 2 的强性求和，是 f 的一个地方性（局部性），实际上，写着 $2\phi_\theta(t)=f(\theta+t)+f(\theta-t)$，

$$S_n(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\phi_\theta(t)\cot\frac{t}{2}\sin nt\,dt+o(1).$$

当 $0<r<1$ 时，从

$$S_n^*(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi_\theta(t)\cot\frac{t}{2}\sin nt\,dt$$

得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}[S_n^*(\theta)]^2 r^n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\phi_\theta(t)\phi_\theta(u)\cos^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{u}{2}$$

$$\times\frac{4r(1-r^2)\,du\,dt}{[1-2r\cos(u-t)+r^2][1-2r\cos(u+t)+r^2]},$$

事实上,

$$2\sum\sin nt\cdot\sin nu\,r^n=\sum_{n=1}^{\infty}[\cos n(t-u)-\cos n(t+u)]r^n$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-u)+r^2}-\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t+u)+r^2}\right)$$

$$=\frac{(1-r^2)r\sin t\sin u}{[1-2r\cos(t-u)+r^2][1-2r\cos(t+u)+r^2]}.$$

当 $f(\theta)\equiv1$ 时,上式簡化为

$$\frac{r}{1-r}$$

$$=\frac{4r(1-r^2)}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\frac{1}{2}t\cos^2\frac{1}{2}u\,du\,dt}{[1-2r\cos(u-t)+r^2][1-2r\cos(u+t)+r^2]}.$$

由是,当 $|f(\theta)|\leqslant1$ 时,我們見到 $\sum_{n=1}^{\infty}[S_n^*(\theta)]^2r^n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}r^n$. 上式积分中的被积函数 $P(t, u, r)$ 是正的,我們又得到等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}[S_n^*(\theta)-f(\theta)]^2r^n=\frac{4r(1-r^2)}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_\theta(u)\varphi_\theta(t)P(t,u,r)\,dt\,du$$

$$\equiv A(\varphi_\theta, r).$$

現在証明 $\sum_{\nu=1}^{n}[S_\nu^*(\theta)-f(\theta)]^2=o(n)$ 等价于 $A(\varphi_\theta,r)=o\left(\frac{1}{1-r}\right)$.

假如第一式成立,那末 $A(\varphi_\theta, r)$ 等于

$$\sum_{n=1}^{\infty}[S_n^*-f]^2r^n=\sum_{n=1}^{\infty}o(n)(r^n-r^{n+1})=o\left[\frac{1}{(1-r)^2}\right](1-r)$$

$$=o\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

假如 $A(\varphi_\theta, r)=o\left(\frac{1}{1-r}\right)$, 那末写着 $p_\nu=(S_\nu^*-f(\theta))^2$,

$$\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\nu} \leqslant 4 \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\nu} = o(n).$$

当 f 在 θ 具有連續性时，$\varphi_\theta(t)\to 0 (t\to 0)$．因此，由求和法的局部性，$A(\varphi_\theta, r)=o\left(\frac{1}{1-r}\right)$，$\sum_{\nu=1}^{n}[S_\nu^*-f]^2=o(n)$．

設 $0<\delta<\pi$，置

$$A_\delta(\varphi_\theta, r)=\frac{4r(1-r^2)}{\pi^2}\int_0^\delta\int_0^\delta \varphi_\theta(u)\varphi_\theta(t)P(t, u, r)\,du\,dt,$$

由求和法的局部性，$\sum_{\nu=0}^{n}[S_\nu^*(\theta)-f(\theta)]^2=o(n)$ 等价于 $A_\delta(\varphi_\theta, r)=o\left(\frac{1}{1-r}\right)$．利用許瓦茲不等式，

$$|A_\delta(\varphi_\theta, r)|\leqslant\frac{4r(1-r^2)}{\pi^2}\left[\int_0^\delta\int_0^\delta \varphi_\theta^2(t)P(t, u, r)\,du\,dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left[\int_0^\delta\int_0^\delta \varphi_\theta(u)\,P(t, u, r)\,du\,dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{4r(1-r^2)}{\pi^2}\int_0^\delta\int_0^\delta \varphi_\theta^2(t)P(t, u, r)\,du\,dt.$$

由于

$$4r(1-r^2)\int_0^\pi P(t, u, r)\,du=\cot\frac{t}{2}\int_0^\pi \cot\frac{u}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sin nu\sin nt\, r^n\,du$$

$$=\pi\cot\frac{t}{2}\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin nt,$$

所以

$$|A_\delta(\varphi_\theta, r)|\leqslant\frac{1}{\pi^2}\int_0^\delta \varphi_\theta^2(t)\,\pi\cot\frac{t}{2}\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin nt\,dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}r^n[S_n^*(\varphi_\theta^2, 0)+o(1)]=o\left(\frac{1}{1-r}\right),$$

事实上，$\int_0^t \varphi_\theta^2\,du=o(t)$ 含有 $\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu^*(\varphi_\theta^2, 0)=o(n)$，而

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n S_n^*=\sum_{n=1}^{\infty}r^n(1-r)\,o(n)=o\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

由是得到所要的强性求和的結果．証明完毕．

系 $\int_0^t|\varphi_\theta(u)|\,du=o(t)$ 含有 $\sum_{\nu=0}^n[S_n(\theta)-f(\theta)]^2=o(n\log n)$.

这也是哈戴-立脱尔伍德的定理，見数学基础 (Fundamenta Mathematicae) 25 (1935).

【証明】 从定理1的証明，我們見到 $|A(\varphi_\theta, r)|\leqslant A_\delta(|\varphi_\theta|, r)+0\left(\frac{1}{1-r}\right)$. 由于

$$0\leqslant P(t,u,r)\leqslant\{[(1-r)^2+r\pi^{-2}(u-t)^2][(1-r)^2+r\pi^{-2}(u+t)^2]\}^{-1}$$
$$\equiv P^*(t, u, r),$$

所以

$$A_\delta(|\varphi_\theta|, r)$$
$$\leqslant\iint\limits_{0<u+t<1-r}+\iint\limits_{1-r<u+t<2\delta}4r\pi^{-2}(1-r^2)P^*(u, t, r)|\varphi_\theta(t)\varphi_\theta(u)|\,du\,dt$$
$$\equiv J_1+J_2.$$

在假設 $\int_0^t|\varphi_\theta(u)|\,du=o(t)$ 下，我們見到

$$J_1<\frac{4r(1-r^2)}{\pi^2}\frac{1}{(1-r)^4}\left[\int_0^{1-r}|\varphi_\theta(t)|\,dt\right]^2=o\left(\frac{1}{1-r}\right),$$

$$J_2\leqslant2(1-r^2)\iint\limits_{\substack{1-r<u+t<2\delta\\0<t<u}}4r\pi^{-2}P^*(u, t, r)|\varphi_\theta(t)\varphi_\theta(u)|\,du\,dt.$$

由于

$$8r\pi^{-2}P^*(u, t, r)\leqslant8(u+t)^{-2}[(1-r^2)+r\pi^{-2}(u-t)^2]$$
$$\leqslant8\pi^2\{u^2[(1-r)^2+r(u-t)^2]\}^{-1},$$

所以

$$\frac{J_2}{8\pi^2(1-r^2)}\leqslant\int_{\frac{1-r}{2}}^{2\delta}\frac{|\varphi_\theta(u)|}{u^2}\left[\int_0^u|\varphi_\theta(t)|\{(1-r)^2+r(u-t)^2\}dt\right]du$$

$$=\frac{1}{(1-r)^2}\int_{\frac{1-r}{2}}^{2\delta}\frac{|\varphi_\theta(u)|}{u^2}o(u)\,du.$$

从而

$$J_2=o\left[\int_{\frac{1-r}{2}}^{2\delta}\frac{|\varphi_\theta(u)|}{u(1-r)}du\right]$$

$$=o\left(\frac{1}{1-r}\right)+o\left[\frac{1}{1-r}\int_{\frac{1-r}{2}}^{2\delta}\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi_\theta(v)|\,dv\,du\right]$$

$$=o\left(\frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r}\right),$$

$$A_\delta(|\varphi_\theta|,r)=o\left(\frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r}\right).$$

置 $r=1-\frac{1}{n}$，就得到 $\sum_{n=1}^{n}[S_n^*(\theta)-f(\theta)]^2=o(n\log n)$。証毕。

我們要問：在 $\int_0^t|\varphi_\theta(u)|^2du=o(t)$ 的假設下，能否导出更强的結果 $\sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu(\theta)-f(\theta)|^k=o(n)$ $(k>2)$？定理 2 回答这个問題。

定理 2 設 $p>1$，則当

$$\Phi_p(t)=\int_0^t|\varphi_\theta(u)|^p du=o(t)$$

时，$\sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu(\theta)-f(\theta)|^k=o(n)$ 对于任一正数 k 成立。

当証明时，不妨假設 $p\leqslant 2$。事实上，設 $1<p_1<p$，則

$$\int_0^t|\varphi_\theta(u)|^{p_1}du\leqslant\left[\int_0^t|\varphi_\theta(u)|^p du\right]^{\frac{p_1}{p}}\left[\int_0^t dt\right]^{1-\frac{p_1}{p}}=o(t).$$

記 $A_r[f]=\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^r d\theta\right]^{\frac{1}{r}}$,

$$N_r(c)=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^r\right]^{\frac{1}{r}}.$$

引理 1 設 $f\in L_r[0,2\pi]$，則当 $r=2$ 时，$A_2[f]=N_2(c)$，但

$$f(\theta)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\theta}.$$

又若 $1<r<2$，則 $N_{r'}[c]\leqslant A_r[f]$，但 $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$，$r'$ 是一偶数。

【証明】 写着 $c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$，$c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)$ $(n>0)$，則

$$f(\theta)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta).$$

記 $\sigma_n(\theta)$ 为 $\mathfrak{S}[f]$ 的费耶和，那末

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\sigma_n(\theta)]^2d\theta=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2)\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)^2$$

$$\leqslant\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

最后的級数，由贝塞尔不等式，不大于 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2d\theta$. 另一方面，由法都定理，

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(\theta)]^2d\theta\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[\sigma_n(\theta)]^2d\theta.$$

因此，得到等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(\theta)]^2d\theta=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

或是

$$A_2[f]=N_2(c).$$

这是派司伐耳 (Parseval) 的等式. 派司伐耳于 1806 年建立了这个等式，当然存在着很大的限制；这里所述的形式，是法都于 1906 年完成的；因此，派司伐耳等式，經过百年的改进，才得完成.

写着 $f_1(\theta)=f(\theta)$；当 $j>1$ 时，

$$f_j(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_{j-1}(\theta+t)f((-1)^jt)dt\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_{jn}e^{in\theta}$$

当 $f(\theta)\sim\sum c_ne^{in\theta}$, $g(\theta)\sim\sum d_ne^{in\theta}$ 并且积分

$$h(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta+t)g(t)dt$$

存在时，容易明白：$h(\theta)\sim\sum c_nd_{-n}e^{in\theta}$. 由是可知：当 $j=2$ 时，$c_{2,n}=c_nc_{-n}=|c_n|^2$. 假如 $c_{jn}=|c_n|^j$，那末

$$c_{j+2,n}=|c_n|^jc_{-n}c_n=|c_n|^{j+2}.$$

因此，当 j 是偶数时，$c_{jn}=|c_n|^j$.

設 λ,μ,ν 都是正数而适合 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=1$，那末当

$$a(x)\geqslant 0,\quad b(x)\geqslant 0,\quad c(x)\geqslant 0$$

时，成立着赫耳窦不等式

$$\int abc\,dx\leqslant\left(\int a^{\lambda}dx\right)^{\frac{1}{\lambda}}\left(\int b^{\mu}dx\right)^{\frac{1}{\mu}}\left(\int c^{\nu}dx\right)^{\frac{1}{\nu}}.$$

写着 $\frac{1}{\lambda}=1-\alpha-\beta$, $\frac{1}{\mu}=\beta$, $\frac{1}{\nu}=\alpha$, 我們見到 $|h(\theta)|$ 小于或等于

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}&|f(\theta+t)|^{\frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}}|g(t)|^{\frac{1-\alpha-\beta}{1-\beta}}\cdot|f(\theta+t)|^{\frac{\beta}{1-\alpha}}|g(t)|^{\frac{\alpha}{1-\beta}}dt\\&\leqslant\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta+t)|^{\frac{1}{1-\alpha}}|g(t)|^{\frac{1}{1-\beta}}dt\right]^{1-\alpha-\beta}\\&\quad\times\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta+t)|^{\frac{1}{1-\alpha}}dt\right]^{\beta}\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|^{\frac{1}{1-\beta}}dt\right]^{\alpha}\end{aligned}$$

或是

$$\begin{aligned}|h(\theta)|\leqslant&\left[A_{\frac{1}{1-\alpha}}[f]\right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}}\cdot\left[A_{\frac{1}{1-\beta}}[g]\right]^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\\&\times\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta+t)|^{\frac{1}{1-\alpha}}|g(t)|^{\frac{1}{1-\beta}}dt\right]^{1-\alpha-\beta},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}A_{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}[h]&\leqslant\left\{A_{\frac{1}{1-\alpha}}[f]\right\}^{\frac{\beta}{1-\alpha}}\cdot\left\{A_{\frac{1}{1-\beta}}[g]\right\}^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\\&\quad\times\left\{A_{\frac{1}{1-\alpha}}[f]\right\}^{\frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}}\cdot\left\{A_{\frac{1}{1-\beta}}[g]\right\}^{\frac{1-\alpha-\beta}{1-\beta}}\\&=A_{\frac{1}{1-\alpha}}[f]\cdot A_{\frac{1}{1-\beta}}[g],\end{aligned}$$

这里 $0<\alpha+\beta<1$, $\alpha>0$, $\beta>0$. 当 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_j<1$, $\alpha_1>0$, $\cdots$, $\alpha_j>0$ 时，我們見到

$$\begin{aligned}A_{\frac{1}{1-\alpha_1-\cdots-\alpha_j}}[f_j]&\leqslant A_{\frac{1}{1-\alpha_1}}[f]\cdot A_{\frac{1}{1-\alpha_2-\cdots-\alpha_j}}[f_{j-1}]\\&\leqslant\prod_{\nu=1}^{j}A_{\frac{1}{1-\alpha_\nu}}[f].\end{aligned}$$

置 $j=k$, $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=\frac{1}{2k}$, 則得

$$A_2[f_k]\leqslant\left\{A_{\frac{2k}{2k-1}}[f]\right\}^k.$$

这就是

$$N_2[c^k]=N_{2k}^k[c]\leqslant A^k_{\frac{2k}{2k-1}}[f].$$

因此, $N_{r'}[c]\leqslant A_r[f]$ 当 $r'=2k$ 时成立. 其实, 只要 $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$, $N_{r'}[c]\leqslant A_r[f]$ 就成立,这里可以避免应用这一般的不等式. 在特殊情况 $r'=2k(k=2, 3, \cdots)$, 我們称 $N_{r'}[c]\leqslant A_r[f]$ 是 W. H. 楊格的不等式. 楊格还有一个不等式,可述如下:

引理 2 設 $\frac{1}{r'}+\frac{1}{r}=1$, 則当 r' 是一偶数时, 成立着 $A_{r'}[f]\leqslant N_r[c]$.

【証明】 首先証明如下的事实: 固定 $L_r(a, b)$ 中一个函数 $F(x)$, 对于 $L_{r'}(a, b)$ 中任一函数 $G(x)$, 在条件 $\int_a^b|G(x)|^{r'}dx\leqslant 1$ 下,

$$I(G)=\left|\int_a^b F(x)G(x)dx\right|$$

的最大值等于 $\left\{\int_a^b|F(x)|^r dx\right\}^{\frac{1}{r}}$. 事实上, 設 $\varphi(u)$ 和 $\psi(u)$ 互为逆函数:

$$v=\varphi(u),\quad u=\psi(v)$$

并且 $\varphi(0)=\psi(0)=0$, $\varphi'(u)>0$, $\psi'(v)>0$, 則当 $\alpha>0$, $\beta>0$ 时,成立着

$$\alpha\beta\leqslant\int_0^\alpha\varphi(u)\,du+\int_0^\beta\psi(u)\,du,$$

其中等号当且只当 $\beta=\varphi(\alpha)$ 时成立. 这是可以从图形上直接明白的. 特别,取 $\varphi(u)=u^{r-1}(r>1)$, 那末我們得到

$$\alpha\beta\leqslant\frac{\alpha^r}{r}+\frac{\beta^{r'}}{r'}\quad\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1\right).$$

从而

$$I(G)\leqslant\frac{1}{r}\int_a^b|F(x)|^r dx+\frac{1}{r'}\int_a^b|G(x)|^{r'}dx.$$

我們不妨假設 $\int_a^b|F|^r dx=1$ 来求 $\max I(G)$. 因此 $I(G)\leqslant\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$,

取 $G=|F|^{r-1}\operatorname{sgn} F$，則 $G\in L_{r'}(a, b)$．此时

$$I(G)=\int_a^b |F(x)|^r dx.$$

右边等于 1，左边不大于 1，所以 $I(G)$ 的最大值是 1.

設 $f_n(\theta)=\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu\theta}$，$g(\theta)=\sum d_n e^{in\theta}$，$\int_{-\pi}^{\pi}|g|^r d\theta\leqslant 1$，則

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}_n g d\theta\right|=\left|\sum_{\nu=-n}^{n}\bar{c}_\nu d_\nu\right|\leqslant N_r(c)N_{r'}(d)\leqslant N_r(c)A_r(g),$$

这里应用了引理 1．取左边的最大值，我們得到

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f_n|^{r'}d\theta\right)^{\frac{1}{r'}}\leqslant N_r(c)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

从而 $A_{r'}(f_n)\leqslant N_r[c]$.

由于 $r<2$，所以 $N_r(c)<\infty$ 含有 $N_2(c)<\infty$．因此，存在如下的 $\{n_k\}$，$n_k<n_{k+1}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f_{n_k}(\theta)-f_{n_{k+1}}(\theta)|^2 d\theta<2^{-k}.$$

从而 $f_{n_1}(\theta)+\sum_1^\infty\{f_{n_{k+1}}(\theta)-f_{n_k}(\theta)\}$ 几乎处处收斂于一个函数 $f(\theta)$，$f(\theta)\in L_2(-\pi, \pi)$，并且

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f_n(\theta)-f(\theta)|^2 d\theta$$
$$\leqslant 2\int_{-\pi}^{\pi}|f_n(\theta)-f_{n_k}(\theta)|^2 d\theta+2\int_{-\pi}^{\pi}|f_{n_k}(\theta)-f(\theta)|^2 d\theta\to 0.$$

由是 $A_{r'}[f]\leqslant\liminf A_{r'}[f_{n_k}]\leqslant N_r(c)$．引理 2 的証明完毕.

【定理 2 的証明】 要从 $\Phi_p(t)=o(t)$ 导出 $\sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu(\theta)-f(\theta)|^k=o(n)$，取足够大的偶数 $r'=\frac{r}{r-1}$ 使 $r'>k$，$r<p$．因此，

$$\Phi_r(t)=o(t)$$

成立；从 $\Phi_r(t)=o(t)$ 导出 $\sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu(\theta)-f(\theta)|^{r'}=o(n)$ 好了.

由于 $|S_\nu-f|^{r'}\leqslant 2^{r'-1}\{|S_\nu-S_\nu^*|^{r'}+|S_\nu^*-f|^{r'}\}$，所以 $\sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu-f|^{r'}=o(n)$ 等价于 $\sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu^*-f|^{r'}=o(n)$．关于指数 k 的强性求和，显然是

f 在某点的一个局部性. 写着

$$S_\nu^*(\theta)-f(\theta)=\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{1}{\pi}\varphi_\theta(t)\cot\frac{t}{2}\sin\nu t\,dt=S'_\nu+S''_\nu,$$

我們見到

$$\left\{\sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu^*(\theta)-f(\theta)|^{r'}\right\}^{\frac{1}{r'}}\leqslant\left[\sum_{\nu=0}^{n}|S'_\nu|^{r'}\right]^{\frac{1}{r'}}+\left[\sum_{\nu=0}^{n}|S''_\nu|^{r'}\right]^{\frac{1}{r'}}$$

$$=S'+S''.$$

由于

$$|S'_\nu|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\varphi_\theta(t)\cot\frac{t}{2}\cdot\nu t\right|dt\leqslant\nu\int_0^{\frac{1}{n}}|\varphi_\theta(t)|\,dt,$$

所以 $|S'_\nu|\leqslant\nu\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{r'}}\left(\Phi_r\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{r}}=o\left(\frac{\nu}{n}\right)$, 从而

$$S'=[no(1)]^{\frac{1}{r'}}=o\left(n^{\frac{1}{r'}}\right).$$

将 S''_ν 看成函数

$$\begin{cases}\cot\frac{t}{2}\cdot\varphi_\theta(t) & \left(\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant\pi\right),\\ 0 & \left(0\leqslant t<\frac{1}{n}\right)\end{cases}$$

的富理埃系数,那末利用楊格的不等式,

$$S''=\left[\sum_{\nu=0}^{n}|S''_\nu|^{r'}\right]^{\frac{1}{r'}}\leqslant\left[\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\left|\frac{\varphi_\theta(t)}{2\tan\frac{t}{2}}\right|^{r}dt\right]^{\frac{1}{r}},$$

因此

$$S''^{r}\leqslant\left[\frac{\Phi_r(t)}{\left(2\tan\frac{t}{2}\right)^{r}}\right]_{\frac{1}{n}}^{\pi}+O\left[\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\Phi_r(t)\,t^{-1-r}\,dt\right]=o(n^{r-1}).$$

从而 $S'+S''=o\left(n^{\frac{1}{r'}}\right)$. 証明完毕.

假如 $f(\theta)$ 在閉区間 $a\leqslant\theta\leqslant b$ 上具有連續性, 那末对于一定的 $r(r>1)$, $\Phi_r(t)=o(t)$ 在 $a\leqslant\theta\leqslant b$ 中均匀地成立. 由强性求和的局部性, 我們得到

系 假如 $f(\theta)$ 在 $a\leqslant\theta\leqslant b$ 中是連續的，那末在此区間中，均匀地成立着

$$\sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu(\theta)-f(\theta)|^k=o(n)\quad(k>0).$$

1922 年，卡勒曼(Carleman)将定理 2 中的假設改为

$$\int_0^t|\varphi_\theta(u)|^2du=O(t) \text{ 和 } \int_0^t|\varphi_\theta(u)|\,du=o(t),$$

詳見倫敦数学会志(Proc. L. M. S.) (2) 21 (1923). 后来，色东 (Sutton)在上記杂志 (2) 23 (1925) 中，将卡勒曼的 $O(t)$ 条件改进为

$$\int_0^t \varphi(u)|^p du=O(t)\quad(p>1).$$

他并且証明：这个条件結合着 $\int_0^t\varphi_\theta(u)\,du=o(t)$ 包含等式

$$\sum_{\nu=0}^{n}|\sigma_\nu(\theta)-f(\theta)|^k=o(n)\quad(k>0),$$

$\sigma_n(\theta)$ 表示 $\mathfrak{S}[f]$ 的費耶平均. 后来哈戴-立脫尔伍德指出色东的条件实含有任何正指数的强性求和 [Proc. L. M. S. (2) 26 (1927)]. 詳細地說：

定理 3 两个条件 $\Phi_p(t)=O(t)$ 和 $\int_0^t\varphi_\theta(u)du=o(t)$ 含有

$$\sum_{\nu=0}^{n}|S_\nu(\theta)-f(\theta)|^k=o(n)\quad(k>0).$$

【証明】 置 $a\eta=\frac{P}{n}$，写着 $\pi(S_n^*(\theta)-f(\theta))=\alpha_n+\beta_n$，这里

$$\alpha_n=\int_0^\eta\varphi_\theta(t)\cot\frac{t}{2}\sin nt\,dt=\left[\cot\frac{t}{2}\sin nt\int_0^t\varphi_\theta(u)\,du\right]_0^\eta-\int_0^\eta.$$

末項等于

$$-\int_0^\eta\left[n\cos nt\cot\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sin nt\operatorname{cosec}^2\frac{t}{2}\right]\int_0^t\varphi_\theta(u)\,du\cdot dt$$

$$=\int_0^\eta o\left(n+t\frac{nt}{t^2}\right)dt=o(1).$$

从而 $\alpha_n=o(1)$. 要处理

$$\beta_n=\int_\eta^\pi\cot\frac{t}{2}\left[\frac{d}{dt}\int_0^t\sin nt\,\varphi_\theta(t)\,dt\right]dt,$$

我們作出与正数 τ 有关的奇函数 $-\chi(-t)=\chi(t)$:

$$\chi(t)=\begin{cases}0 & (\tau<t\leqslant\pi)\\ \varphi_\theta(t) & (0\leqslant t\leqslant\tau),\end{cases}$$

設 $\chi(t)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(\tau)\sin nt$, 则因

$$\beta_n=-\frac{\pi}{2}\cot\frac{\eta}{2}c_n(\eta)+\frac{\pi}{4}\int_\eta^\pi c_n(t)\operatorname{cosec}^2\frac{t}{2}dt,$$

所以

$$\left(\sum_1^n|\beta_\nu|^k\right)^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{\pi}{2}\cot\frac{\eta}{2}\left(\sum_1^n|c_\nu(\eta)|^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$+\frac{\pi}{4}\int_\eta^\pi\operatorname{cosec}^2\frac{t}{2}\left[\sum_1^n|c_\nu(t)|^k\right]^{\frac{1}{k}}dt.$$

我們不妨假設 k 是偶数，由楊格的不等式，

$$\left(\sum_{\nu=1}^n|c_\nu(t)|^k\right)^{\frac{1}{k}}\leqslant\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi|\chi(u)|^{k'}du\right]^{\frac{1}{k'}}$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}\int_{-t}^t|\varphi_\theta(u)|^{k'}du\right]^{\frac{1}{k'}}.$$

取 k 足够大，使 $k'<p$, 那末 $\int_0^t|\varphi_\theta(u)|^{k'}du=O(t)$; 从而

$$\left[\sum_{\nu=1}^n|c_\nu(t)|^k\right]^{\frac{1}{k}}=O\left(t^{\frac{1}{k'}}\right).$$

由是，

$$\left[\sum_{\nu=1}^n|\beta_\nu|^k\right]^{\frac{1}{k}}=O\left(\eta^{\frac{1}{k'}-1}\right)+O\left(\int_\eta^\pi t^{\frac{1}{k'}-2}dt\right)=O(n/P)^{\frac{1}{k}}.$$

取 P 很大，我們見到

$$\left\{\sum_{\nu=0}^n|S_\nu^*(\theta)-f(\theta)|^k\right\}^{\frac{1}{k}}<\left[\sum_{\nu=0}^n|\alpha_\nu|^k\right]^{\frac{1}{k}}+\left[\sum_0^n|\beta_\nu|^k\right]^{\frac{1}{k}}=o\left(n^{\frac{1}{k}}\right),$$

这就証明了定理 3.

对于共軛級数，成立着类似于定理 3 的結果:

系 1 当积分 $\bar{f}(\theta)$ 存在时，条件 $\int_0^t|\psi_\theta(u)|^p du=O(t)\ (p>1)$ 含有

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\bar{S}_\nu(\theta)-\bar{f}(\theta)|^k=o(n) \quad (k>0).$$

【証明】 設 $\psi_\theta(t)\sim\sum B_n(\theta)\sin nt$, $\eta=\frac{P}{n}$. 調整 $B_1(\theta)$ 的值,可使 $\bar{f}(\theta)=0$. 現在

$$\bar{S}_n(0)=\sum_{\nu=1}^{n} B_\nu(0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\psi_\theta(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\psi_\theta(t)\,dt$$

$$=\int_0^\eta+\int_\eta^\pi -\frac{1}{\pi}\cos nt\cot\frac{t}{2}\psi_\theta(t)\,dt+o(1)$$

$$=\alpha_n'+\beta_n'+o(1).$$

在区間 $0\leqslant t\leqslant\frac{P}{n}$ 中, $\cos nt$ 只有 $O(P)$ 次振动, 在每小区間中, $\cos nt$ 是单調的;因此,利用第二中值定理, $\alpha_n'=o(1)$. 至于 β_n', 可如定理 3 的証明, 以处理 β_n 的方法施行估計, 定义 $c_n(\tau)$ 为一个偶函数的系数好了. 証明完毕.

系 2 假如 θ 是 f 的一个連續点,那末当 $\bar{f}(\theta)$ 存在时,对于任一正数 k, 成立着

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\bar{S}_\nu(\theta)-\bar{f}(\theta)|^k=o(n).$$

2. 几乎收斂的級数

設 $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$, 假如存在如下的 $\{n_k\}$ $(n_k<n_{k+1})$, $[1, N]$ 中含有 $\nu(N)$ 个 S_ν——$S_{\nu(N)}\leqslant N$, $S_{\nu(N)+1}>N$,

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k}=s, \quad \frac{\nu(N)}{N}\to 1,$$

那末称 $\sum u_n$ **几乎收斂**于 S. 当 $N\to\infty$ 时, 称 $\frac{\nu(N)}{N}$ 的上限为 $\{n_k\}$ 的**密度**.

引理 强性可以求和級数必然几乎收斂，有界的几乎收斂級数可以强性求和。

【証明】 首先証明：数列 $\{s_n\}$ 几乎收斂于 0 的充要条件是适合 $|s_n|\leqslant\varepsilon$ 的一切 n，成一密度 1 的数列．必要性是无待証明的．現在假設适合 $|s_n|\leqslant\varepsilon_m$ $(\varepsilon_m\searrow 0)$ 的一切 n 成一数列 S_m，那末 $S_m\supset S_{m+1}$，S_m 的密度是 $1(m=1, 2, \cdots)$．固定 m，取 N_m 足够大，使 S_m 在 $(0, N_m)$ 中的密度大于 $1-\varepsilon_m$，并且 $N_m>N_{m-1}$，

$$S_m\cdot(N_{m-1}, N_m)\neq 0.$$

由是，整数的集 $\sum\limits_m S_m(N_{m-1}, N_m)\equiv S$ 落在 $(0, N)$ $(N_m<N\leqslant N_{m+1})$ 中的个数不下于 S_m 落在 $(0, N)$ 中的个数，从而 S 的密度是 1．由于 $S_n\to 0$ $(n\in S)$，所以 $\{S_n\}$ 几乎收斂于极限 0．

設 $\{S_n\}$ 关于指数 k 强性可和于 S；設 $\varepsilon>0$，$|S_\nu-S|\geqslant\varepsilon$ 的 ν $(\nu\leqslant N)$ 的个数是 $\nu(N)$，那末

$$|S_0-S|^k+\cdots+|S_n-S|^k\geqslant\nu(N)\varepsilon^k=o(n).$$

从而 $|S_\nu-S|^k<\varepsilon$ 的个数 $n-\nu(n)=n+o(n)$．由是 S_ν 几乎收斂于 S。

假如 S_ν 几乎收斂于 S，并且 $|S_\nu|\leqslant A$，那末，利用上面的記号，

$$|S_0-S|^k+\cdots+|S_n-S|^k\leqslant\nu(n)A^k+\varepsilon^k[n-\nu(n)]$$
$$=o(n)+O(\varepsilon^k n).$$

由于 ε 的任意性，$\sum\limits_{\nu=0}^{n}|S_\nu-S|^k=o(n)$．証明完毕．

定理 1 設 $\varphi_0(x)$，$\varphi_1(x)$，$\cdots$在$[0, 1]$中是一就范的直交函数系，那末当 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n^2(\log\log n)^2<\infty$ 时，級数 $\sum a_n\varphi_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 中关于指数 2，几乎处处强性可和．

【証明】 1° 当 $v(n)\nearrow\infty$，$\sum a_n^2 v(n)<\infty$ 时，对于如下的 n_k：

$$k\leqslant v(n_k)<k+1,$$

$S_{n_k}(x)=\sum\limits_{\nu=0}^{n_k}a_\nu\varphi_\nu(x)$ $(k\to\infty)$ 在 $[0, 1]$ 中几乎处处收斂．

事实上，由于 $\sum a_n^2<\infty$，存在着 f 适合 $\int_0^1(f(x)-S_n(x))^2\,dx$

$=o(1)$. 这个积分等于 $a_{n+1}^2+a_{n+2}^2+\cdots=r_n$. 現在

$$\sum_{k=1}^{k} r_{n_k}=\sum_{1}^{k-1}(r_{n_k}-r_{n_{k+1}})k+kr_{n_{k+1}}\leqslant\sum_{1}^{\infty}a_n^2v(n),$$

所以級数 $\sum\int_0^1[f(x)-S_{n_k}(x)]^2dx$ 收斂. 由富弼尼定理, 級数 $\sum(f(x)-S_{n_k}(x))$ 几乎处处收斂(参見著者《实函数論》第六章), 从而 $\lim S_{n_k}(x)$ 几乎处处收斂于 $f(x)$.

2° 当 $\sum a_n^2(\log\log n)^2$ 收斂时, $\sum a_n\varphi_n(x)$ 几乎到处可用 $(C,1)$ 平均法求和. 这里对数的底不妨取做 2, 这样一来, 我們見到

$$\sum_{1}^{\infty}(a_{2^n+1}^2+\cdots+a_{2^{n+1}}^2)(\log n)^2<\infty.$$

由是*), 从 1° 知道 $\lim S_{2^n}(x)$ 概斂于 $f(x)$. 另一方面, 写着

$$n\sigma_n(x)=S_1(x)+\cdots+S_n(x),$$

我們見到 $n(S_n-\sigma_n)=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu(\nu-1)\varphi_\nu$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1[S_{2^n}-\sigma_{2^n}]^2dx=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\sum_{\nu=1}^{2^n}a_\nu^2(\nu-1)^2$$

$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[a_\nu^2(\nu-1)^2\sum_{n=(\nu)}^{\infty}4^{-n}\right],$$

这里 $(\nu)=\log\nu/\log 2=\nu^{-2}$. 由是, 最后的級数小于

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\nu-1)^2a_\nu^2\cdot\frac{4}{3}\frac{1}{\nu^2}<2\sum a_\nu^2<\infty.$$

所以 $\lim\sigma_{2^n}(x)=f(x)$ 几乎到处成立. 对于任意的 $k\neq 2^n$, 存在唯一的 n 适合 $2^n<k<2^{n+1}$. 由于

$$\sigma_k-\sigma_{2^n}=\sum_{\nu=2^n}^{k-1}[\sigma_{\nu+1}-\sigma_\nu]$$

的平方小于或等于

$$\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}}\nu[\sigma_{\nu+1}-\sigma_\nu]^2\cdot\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}}\frac{1}{\nu}\leqslant\frac{3}{2}\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}}\nu[\sigma_{\nu+1}-\sigma_\nu]^2,$$

---

*) 考慮 $\sum c_n\psi_n(x)$, 这里 $c_n^2=a_{2^n+1}^2+\cdots+a_{2^{n+1}}^2$,

$$c_n\psi_n(x)=a_{2^n+1}\varphi_{2^n+1}(x)+\cdots+a_{2^{n+1}}\varphi_{2^{n+1}}(x).$$

所以

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \int_0^1 [\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x)]^2 dx$$

$$\leqslant \frac{9}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}} \nu \int_0^1 \cdot \left[\sum_{j=1}^{\nu} a_j \varphi_j(x)(j-1)\left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu}\right) + \frac{1}{\nu} a_\nu \varphi_\nu(x) \right]^2 dx$$

$$= \frac{9}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}} \left[\sum_{j=1}^{\nu} a_j^2 \frac{(j-1)^2}{\nu(\nu+1)^2} + \frac{a_\nu^2}{\nu} \right] \leqslant 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} a_j^2 j^2 + 3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu^2}{\nu}$$

$$\leqslant 6 \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 + 3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu^2}{\nu} < \infty.$$

由富郛尼的定理，$\sum n(\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x))^2$ 几乎处处收斂. 从而

$$\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}} \nu [\sigma_{\nu+1}(x) - \sigma_\nu(x)] \doteq o(1),$$

$$\sigma_k(x) - \sigma_{2^n}(x) \doteq o(1).$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x)$ 几乎处处存在. 这就証明了 2°.

3° 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\sigma_n(x) - S_n(x)|^2/n$ 几乎处处收斂.

事实上，将所設級数，施行分項积分，我們見到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 a_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 a_\nu^2 \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 a_\nu^2 \cdot \frac{1}{\nu^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2 < \infty.$$

由富郛尼定理，所設級数几乎到处收斂. 由是，几乎处处成立着

$$\sum_{n=1}^{N} n \frac{|\sigma_n(x) - S_n(x)|^2}{n} = o(N).$$

或是 $\sum\limits_{\nu=1}^{n} |\sigma_\nu(x) - S_\nu(x)|^2 \doteq o(n)$.

4° 定理的証明：

$$\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} |S_\nu(x) - f(x)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |S_\nu(x) - \sigma_\nu(x)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{0}^{n} |\sigma_\nu - f|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\doteq o(1) + o(1) = o(1).$$

証明完毕.

定理 2 在 $(0, 1)$ 中的就范的直交函数級数 $\sum a_n \varphi_n(x)$，当其系数适合条件 $\sum a_n^2 \log^2 n < \infty$ 时，几乎处处收斂.

【証明】 假如 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots$ 是无限不完备的，就是說，存在无限个函数 $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots$ 使 $\{\varphi_n\}+\{\phi_n\}$ 合成一个 $[0, 1]$ 上的就范直交函数系，那末，置

$$\psi_n(x)=\varphi_n(x) \quad (n \neq 2 \text{ 的任一乘方}),$$
$$\psi_{2^n}(x)=\varphi_n(x) \quad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

并且假設 $c_n=0$ $(n \neq 2$ 的任一乘方$)$，$c_{2^n}=a_n$，那末对于直交函数級数 $\sum c_n \psi_n(x)$，我們有系数关系

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 (\log\log n)^2 = \sum c_{2^n}^2 (\log\log 2^n)^2$$
$$= \sum a_n^2 (\log n)^2 < \infty,$$

这里对数的底是 2. 由定理 1 証明中的 1° 和 2°，函数列

$$S_{2^n}(x)=\sum_{m=1}^{2^n} c_m \psi_m(x) \quad (n=1, 2, \cdots)$$

在 $[0, 1]$ 中几乎到处收斂；这就是說，級数 $\sum a_n \varphi_n(x)$ 概收斂.

假如不存在如上的 $\phi_1, \phi_2, \cdots$，那末我們分別考虑两个級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \varphi_{2n-1}(x) \quad \text{和} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \varphi_{2n}(x).$$

对于 $\{\varphi_{2n-1}\}$ 有 $\{\varphi_{2n}\}$，对于 $\{\varphi_{2n}\}$ 又有 $\{\varphi_{2n-1}\}$；因此，从級数

$$\sum a_{2n-1}^2 (\log n)^2, \ \sum a_{2n}^2 (\log n)^2$$

的收斂，知 $\sum a_{2n-1} \varphi_{2n-1}(x)$ 和 $\sum a_{2n} \varphi_{2n}(x)$ 都概收斂. 从而 $\sum a_n \varphi_n(x)$ 几乎处处收斂. 証明完毕.

定理 3 $\mathfrak{S}[f]$ 和 $\bar{\mathfrak{S}}[f]$ 都是几乎处处收斂.

这是下述定理 4 的一个結論，定理 4 是馬辛基維斯 (1936) 和齐革蒙特 [Proc. London Math Soc. 47 (1947)] 的定理.

定理 4 当 $f \in L$ 时，$\mathfrak{S}[f]$ 和 $\bar{\mathfrak{S}}[f]$ 都是几乎处处关于任一正指数强性可和.

【証明】 設 $z=\rho e^{i\theta}(\rho<1)$，$\mathfrak{S}[f]$ 的系数是 a_n, b_n；那末当 $\rho \to 1$ 时，

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-ib_n)z^n\equiv F(z)$$

表示 $\mathfrak{S}[f]+i\tilde{\mathfrak{S}}[f]$. 置 $t_n(z)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu-ib_\nu)z^\nu$,

$$\tau_n(z)=\frac{1}{n+1}[t_0(z)+t_1(z)+\cdots+t_n(z)].$$

由于 $\lim\tau_n(e^{i\theta})$ 几乎处处收斂于 $f(\theta)+i\tilde{f}(\theta)=F(e^{i\theta})$,

$$\left\{\sum_{m=0}^{n}|t_m-F|^k\right\}^{\frac{1}{k}}\leqslant\left[\sum_{m=0}^{n}|t_m-\tau_m|^k\right]^{\frac{1}{k}}+\left[\sum_{m=0}^{n}|\tau_m-F|^k\right]^{\frac{1}{k}}\quad(k>1),$$

所以我們只要建立 $\sum_{m=0}^{n}|t_m-\tau_m|^k\doteq o(n)$. $k>1$ 的話,此关系含在

$$\sum_{m=1}^{n}(m+1)^k|t_m-\tau_m|^k\doteq o(n^{1+k})$$

中. 事实上,由加减变换,

$$\sum_{m=0}^{n}|t_m-\tau_m|^k=\sum_{m=0}^{n}(m+1)^k|t_m-\tau_m|^k\cdot(m+1)^{-k}$$

$$\doteq\sum_{m=1}^{n-1}\Delta(m+1)^{-k}o(m^{1+k})+(n+1)^{-k}o[(n+1)^{k+1}]$$

$$\doteq o(n).$$

但是前式又含在

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\nu+1)^k|t_\nu-\tau_\nu|^k\rho^{\nu k}\doteq o[(1-\rho)^{-1-k}]$$

中. 事实上,設 $1-\rho=\frac{1}{n}$, 当 $\nu\leqslant n$ 时,注意到

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu\geqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)^n>e^{-1},$$

我們就导出 $\sum_{\nu=1}^{n}(\nu+1)^k|\tau_\nu-t_\nu|^k=o(n^{1+k})$. 另一方面, 設 $\theta=0$, 从

$$(n+1)(t_n-\tau_n)=\sum_{\nu=0}^{n}\nu(a_\nu-ib_\nu),$$

我們見到 $\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)(t_\nu-\tau_\nu)z^\nu=zF'(z)(1-z)^{-1}$. 假定 k 是一个偶数,

那末利用楊格的不等式，得到

$$\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)^{k}|t_{\nu}-\tau_{\nu}|^{k}\rho^{\nu k}\right\}^{\frac{1}{k}}\leqslant\left\{\frac{\rho^{k'}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{F'(\rho e^{i\psi})}{1-\rho e^{i\psi}}\right|^{k'}d\psi\right\}^{\frac{1}{k'}}.$$

因此，我們的目的是在适当的情况下，証明

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{F'(\rho e^{i\psi})}{1-\rho e^{i\psi}}\right|^{k'}d\psi=o[(1-\rho)^{1-2k'}],$$

这里 $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$. 置 $S(\rho,t)=\frac{1+\rho e^{it}}{2(1-\rho e^{it})}$，則

$$\begin{aligned}|F'(z)|&=\frac{1}{\rho}\left|\frac{d}{d\theta}\int_{0}^{2\pi}f(t)S(\rho,t-\theta)\,dt\right|\\&\leqslant\frac{2}{1-\rho^{2}}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}|f(t)|P(\rho,t-\theta)\,dt\\&=\frac{2}{1-\rho^{2}}U(|f|;\rho,\theta),\end{aligned}$$

$U(|f|;\rho,\theta)$表示$|f(t)|$的普阿松积分．置 $\Delta(\rho,\psi)=1-2\rho\cos\psi+\rho^{2}$，$1-\rho=\delta$，我們只要証明

$$I(\rho)\equiv\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[U(|f|;\rho,\psi)]^{k'}}{\Delta^{\frac{k'}{2}}(\rho,\psi)}d\psi=o(\delta^{1-k'}).$$

改写 $I(\rho)$ 为

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[U^{k'-1}]U}{\Delta^{\frac{k'}{2}}(\rho,\psi)}d\psi\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[U(|f|;\rho,\psi)]^{k'-1}}{\Delta^{\frac{k'}{2}}(\rho,\psi)}d\psi\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(u)|P(\rho,\psi-u)\,du\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(u)|\,du\int_{-\pi}^{\pi}\frac{U^{k'-1}(|f|;\rho,\psi)P(\rho,\psi-u)}{\Delta^{\frac{k'}{2}}(\rho,\psi)}d\psi\\&=\int_{-(1-\rho)}^{1-\rho}+\int_{|u|>1-\rho}|f(u)|\left[\int_{-\pi}^{\pi}\cdots d\psi\right]du\\&=I_{1}(\rho)+I_{2}(\rho).\end{aligned}$$

由于 $\Delta(\rho,\psi)\geqslant\max\left[(1-\rho)^{2},\frac{1}{3}\psi^{2}\right]$——$\rho\geqslant\frac{\pi^{2}}{12}$ 的話，所以

$$I_1(\rho)\leqslant(1-\rho)^{-k'}\int_{|u|<1-\rho}|f(u)|\,du\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U^{k'-1}\cdot P(\rho,\ \psi-u)\,d\psi\right\}^{*)}$$

$$\leqslant(1-\rho)^{-k'}\int_{|u|<1-\rho}|f(u)|\,du\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(|f|;\rho,\psi)P(\rho,\psi-u)\,d\psi\right\}^{k'-1}$$

$$=(1-\rho)^{-k'}\int_{-(1-\rho)}^{1-\rho}|f(u)|\,U^{k'-1}(|f|;\ \rho^2,\ u)\,du.$$

在以上的計算基础上，我們將問題作如下的簡化：我們不妨假設 $f\geqslant 0$. 于 $[0,\ 2\pi]$ 中取完全点集 E，使在 E 上 $f_1=f$，在 $[0,\ 2\pi]$ 中其他各点 $f_1=0$，f_1 是一有界函数，并且 $|E|$ 甚近于 2π. 我們已經明白，f_1 的級数关于任一正指数可以强性求和，因此，只要証明 $f-f_1$ 的級数也可以这样强性求和，我們就証得 $\mathfrak{S}[f]+i\tilde{\mathfrak{S}}[f]$ 能以任一正指数强性求和了．由是，問題簡化到这样的 f：$f\geqslant 0$；f 在完全点集 E 上，其值是 0；只要証明 $\mathfrak{S}[f]+i\tilde{\mathfrak{S}}[f]$ 在 E 上几乎处处关于任一正指数可以强性求和好了．由于 E 的測度可以甚近于 2π，所以我們达到上述的簡化情况．

設 $F(\theta)$ 是 $f(\theta)$ 在 $[0,\ \theta]$ 上的不定积分，置 $I_h(\theta)=[F(\theta+h)-F(\theta)]h^{-1}$，則在 E 上 $I_h(\theta)=o(1)\ (h\to 0)$. 当 $|h|\leqslant\pi$ 时，記适合

$$\theta\in E,\quad |I_\theta(h)|\leqslant\nu\quad(\nu\ \text{是一正整数})$$

的一切 θ 所成之点集为 E_ν. 那末任何 E_ν 都是閉的，并且

$$|E-(E_1+E_2+\cdots)|=0.$$

我們只要对于任意固定的 ν，証明 $\mathfrak{S}[f]+i\tilde{\mathfrak{S}}[f]$ 在 E_ν 上关于偶指数 k（可以任意大），几乎到处可以强性求和就好了。

在这样簡化的基础上，我們回到 $I_1(\rho)$ 的估計，現在已經假設着 $f\geqslant 0$，我們見到

$$U(f;\ \rho,\ u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}-F(u+t)P'(\rho^2,\ t)dt.$$

---

*) 假如 $\varphi''(t)\leqslant 0$，那末当 $g\geqslant 0$，$h\geqslant 0$ 并且 $\int_a^b h(x)\,dx=1$ 时，

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(g(x))\,h(x)\,dx\leqslant\varphi\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,h(x)\,dx\right\}.$$

这是顏春 (Jenson) 不等式，参考著者《实函数論》第六章．这里 $\varphi(t)=t^{k'-1}$，$k'-1<1$（k 是大于 2 的偶数）。

固定 E_ν 中一点 θ，不妨假設 $\theta=0$，从而 $|F(h)|\leqslant\nu|h|$.

$$U(f;\ \rho^2,u)\leqslant\frac{\nu}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(|u|+|t|)|P'|\,dt=-\frac{2\nu}{\pi}\int_0^{\pi}(|u|+t)P'dt$$

$$<\frac{2\nu}{\pi}\left\{|u|P(\rho,0)+\int_0^{\pi}P\,dt\right\}<\frac{2\nu}{\pi}\left(\frac{|u|}{1-\rho^2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$<\nu\left(\frac{|u|}{1-\rho^2}+1\right).$$

因此，

$$I_1(\rho)\leqslant2(1-\rho)^{-k'}\nu^{k'-1}\int_{|u|<1-\rho}f(u)du=(1-\rho)^{-k'}\nu^{k'-1}o(1-\rho),$$

所以在 E_ν 上，几乎处处成立着 $I_1(\rho)=o((1-\rho)^{1-k'})$.

积分 $I_2(\rho)$ 可以分成如下的两个部分来处理：

$$I_2(\rho)=\int_{1-\rho\leqslant u\leqslant\pi}f(u)du\left[\int_{|\psi|<\frac{1}{2}|u|}+\int_{|\psi|>\frac{1}{2}|u|}\cdots\right]d\psi$$

$$=I_2'+I_2''.$$

要进行 $I_2(\rho)$ 的估計，首先証明，

$$\left|\int_0^{\theta}U(f;\ \rho,u)\,du\right|\leqslant A\nu|\theta|.$$

我們不妨假設 $F(\theta)$ 是具有周期 2π 的函数．上式左端的积分等于

$$U(F,\rho,\theta)-U(F;\rho,0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\{P(\rho,t-\theta)-P(\rho,t)\}dt.$$

因此，所考慮的不等式是下面的不等式：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\cdot|P(\rho,t-\theta)-P(\rho,t)|dt\leqslant A|\theta|$$

的一个結果．我們不妨假設 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\pi$，将上面的积分写成四个部分

$$\int_{-\pi}^{-\pi+\theta}+\int_{-\pi+\theta}^{-\theta}+\int_{-\theta}^{\theta}+\int_{\theta}^{\pi}.$$

在 $[-\pi,-\pi+\theta]$ 上的积分，它的被积函数是均匀有界，它是 $O(\theta)$.
在 $[-\theta,\theta]$ 上的积分小于

$$\theta\int_{-\pi}^{\pi}\{P(\rho,t)+P(\rho,t-\theta)\}\,dt=2\pi\theta.$$

在 $[\theta,\pi]$ 上的积分等于

$$\int_0^{\pi-\theta}(t+\theta)P(\rho,t)dt-\int_\theta^\pi tP(\rho,t)dt$$

$$\leqslant\theta\int_0^{\pi-\theta}P(\rho,t)\,dt+2\theta\int_0^\pi P(\rho,t)\,dt<\frac{3\pi}{2}\theta.$$

同样可証 $[-\pi+\theta,-\theta]$ 的积分也小于 $\frac{3\pi}{2}\theta$. 四个积分的和是 $O(\theta)$。我們建立了有关 $U(f;\rho,u)$ 在 $[0,\theta]$ 上积分的不等式.

当 $|\psi|\leqslant\frac{1}{2}|u|$ 时, $P(\rho,\psi-u)\leqslant P\left(\rho,\frac{1}{2}u\right)$. 因此, I_2' 不大于

$$\int_{1-\rho<u<\pi}f(u)P\left(\rho,\frac{u}{2}\right)du\int_{|\psi|<\frac{|u|}{2}}U^{k'-1}(f;\rho,\psi)\,\Delta^{-\frac{k'}{2}}(\rho,\psi)\,d\psi.$$

里面的积分不大于

$$\left\{\int_{|\psi|<\frac{1}{2}|u|}U(f;\rho,\psi)d\psi\right\}^{k'-1}\cdot\left\{\int_{|\psi|<\frac{1}{2}|u|}\Delta^{-\frac{k'}{2(2-k')}}(\rho,\psi)\,d\psi\right\}^{2-k'}$$

$$\leqslant(A,\nu|u|)^{k'-1}\left\{\int_{|\psi|<\frac{1}{2}|u|}A_2\psi^{-\frac{k'}{2-k'}}d\psi\right\}^{2-k'}$$

$$<A(\nu|u|)^{k'-1}(1-\rho)^{2-2k'}.$$

因此,

$$I_2'<A\nu^{k'-1}(1-\rho)^{2-2k'}\int_{1-\rho<u<\pi}f(u)u^{k'-3}du.$$

我們利用 $I_h(0)=o(1)$ 而知上面的积分等于

$$\left[I_u(0)\,u^{k'-3}\right]_{1-\rho}^{\pi}+(3-k')\int_{1-\rho}^{\pi}u^{k'-4}I_u(0)\,du$$

$$=o[(1-\rho)^{k'-2}].$$

由是, $I_2'=o[(1-\rho)^{1-k'}]$.

最后,我們应用处理 I_1 的方法来对付 I_2'': I_2'' 不大于

$$\int_{\delta<|u|<\pi}\frac{f(u)du}{\Delta^{\frac{1}{2}k'}\left(\rho,\frac{1}{2}u\right)}\int_{-\pi}^{\pi}U^{k'-1}(f;\rho,\psi)P(\rho,\psi-u)d\psi$$

$$\leqslant\int_{\delta<|u|<\pi}\frac{f(u)}{|u|^{k'}}U^{k'-1}(f;\rho^2,u)\,du.$$

設 u 与 E_ν 的距离是 $\chi(u)$, 那末 $U(f;\rho^2,u)\leqslant\nu\left\{1+\frac{\chi(u)}{1-\rho}\right\}$. 由是,

$$I_2'' \leqslant \nu^{k'-1}\int_{1-\rho\leqslant|u|\leqslant\pi}|u|^{-k'}f(u)\,du$$

$$+\left(\frac{\nu}{1-\rho}\right)^{k'-1}\int_{1-\rho\leqslant|u|\leqslant\pi}|u|^{-k'}f(u)\chi^{k'-1}(u)\,du$$

$$=o\left(\frac{1}{(1-\rho)^{k'-1}}\right)+\left(\frac{\nu}{1-\rho}\right)^{k'-1}\int_{-\pi}^{\pi}|u|^{-k'}f(u)\chi^{k'-1}(u)du.$$

总結起来,我們得到

$$I(\rho)\leqslant o\left[\frac{1}{(1-\rho)^{k'-1}}\right]+\left(\frac{\nu}{1-\rho}\right)^{k'-1}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\,\frac{\chi^{k'-1}(u)}{|u|^{k'}}du.$$

我們为了簡便起見,假設 $\theta=0$ 是 E_ν 中的一点. 本来,我們应該考虑一般的积分

$$J(\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}f(u+\theta)\,\frac{\chi^{k'-1}(u+\theta)}{|u|^{k'}}du$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\,\frac{\chi^{k'-1}(u)}{|u-\theta|^{k'}}du.$$

由于 $\chi(u)$ 当 $u\in E_\nu$ 时,等于 0, 所以

$$J(\theta)=\int_{[-\pi,\,\pi]-E_\nu}f(u)\,\frac{\chi^{k'-1}(u)}{|u-\theta|^{k'}}du;$$

$$\int_{E_\nu}J(\theta)\,d\theta=\int_{[-\pi,\,\pi]-E_\nu}f(u)\,\chi^{k'-1}(u)\left\{\int_{E_\nu}|u-\theta|^{-k'}d\theta\right\}du,$$

当 u 是 E_ν 的余补区間 (α,β) 中的一点时,积分

$$\int_{E_\nu}|u-\theta|^{-k'}d\theta\leqslant 2\int_{\chi(u)}^{\infty}\theta^{-k'}\,d\theta=\frac{2}{k'-1}[\chi(u)]^{-k'+1}.$$

因此,

$$\int_{E_\nu}J(\theta)\,d\theta\leqslant\int f(u)\,\frac{2}{k'-1}\chi^{k'-1}(u)\,[\chi(u)]^{1-k'}du$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2}{k'-1}f(u)du<\infty.$$

由是可知 $J(\theta)$ 在 E_ν 上是几乎到处有限的. 我們不妨假設 $J(0)$ 是有限的. 从而 $I(\rho)=O((1-\rho)^{1-k'})$.

我們还要改进这个 O 結果为 $o[(1-\rho)^{1-k'}]$. 写着

$$I(\rho)=I(f,\rho).$$

对于任一正数 ε, 取正数 η 足够小,作如下的 f_1 和 f_2:

$$f_1(t)=f(t)\quad(-2\eta\leqslant t\leqslant 2\eta),\ f_1(t)=0\quad(2\eta\leqslant|t|\leqslant\pi);$$
$$f_2=f-f_1.$$

从不等式 $I(f_1,\rho)\leqslant o((1-\rho)^{1-k'})+\left(\frac{\nu}{1-\rho}\right)^{k'-1}\int_{-2\eta}^{2\eta}f(u)\frac{\chi^{k'-1}(u)}{|u^{k'}|}du$,

我們見到：$I(f_1,\rho)<\varepsilon[(1-\rho)^{1-k'}]$ 是可以做到的.

对于 $I(f_2,\rho)$, 我們写着

$$I(f_2,\rho)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{U^{k'}(f_2;\rho,\psi)}{\Delta^{\frac{1}{2}k'}(\rho,\psi)}d\psi=\int_{-\eta}^{\eta}+\int_{\eta<|\psi|<\pi}$$

$$=\int_{-\eta}^{\eta}\frac{o(1)}{\Delta^{\frac{1}{2}k'}(\rho,\psi)}d\psi+O(1)\int_{\eta<|\psi|<\pi}U^{k'}(f_2;\rho,\psi)d\psi$$

$$=o[(1-\rho)^{1-k'}]+O(\max_{\psi}U^{k'-1})\int_{-\pi}^{\pi}U(f_2;\rho,\psi)\,d\psi$$

$$=o[(1-\rho)^{1-k'}].$$

总而言之：$I(f;\rho)=o[(1-\rho)^{1-k'}]$. 定理証明完毕.

定理 5 假如 $f\in L_2$, 那末 $\mathfrak{S}[f]$ 具有如下的几乎收斂情况：对于几乎一切 θ, 存在 $\{m_k\}$ 和 $\{n_k\}$, $S_{m_k}(\theta)$ 收斂于 $f(\theta)$, 而 $\sum\frac{1}{n_k}<\infty$,

$$\{m_k\}+\{n_k\}=\{n\}_{n=1,2,\cdots}.$$

这个定理,可以拓广到一般的直交函数級数.

定理 6 設 $\{\varphi_n(n)\}$ 是区間 $[0,1]$ 上的一列就范的直交函数. 当 $\sum c_n^2<\infty$ 时,假如級数 $\sum c_n\varphi_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上概可用算术平均法求和,那末对于几乎一切 x, $\{n\}_{n=1,2,\cdots}$ 可以分解为两个自然数列 $\{m_k\}$ 和 $\{n_k\}$, $\sum\frac{1}{n_k}<\infty$ 而 $\sum_{n=0}^{m_k}c_n\varphi_n(x)$ 概收斂[*)]

【証明】 用常用的記号,写着 $(S_n-\sigma_n)(n+1)=\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu\nu\varphi_\nu(x)$, 从

$$\frac{1}{n+1}\int_0^1(S_n-\sigma_n)^2d\theta=\frac{1}{(n+1)^3}\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2c_\nu^2$$

得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\int_0^1(S_n-\sigma_n)^2dx=\sum_{\nu=1}^{\infty}(\nu c_\nu)^2\sum_{n=\nu}^{\infty}(n+1)^{-3}<\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu^2<\infty.$$

---

*) 这是齐革蒙特的定理,見罗馬尼亚的"数学"(Mathematicae) 8 (1934).

由是可知 $[0, 1]$ 中存在点集 E, $|E|=1$, 在 E 上,級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\{S_n(x)-\sigma_n(x)\}^2$$

收斂. 我們不妨假設在 E 上,存在着 $\lim\sigma_n(x)$.

設 $x\in E$, $\varepsilon>0$. 又設不等式 $|\sigma_n(x)-S_n(x)|\geqslant\varepsilon$ 当

$$n=m_1,\ m_2,\ \cdots\quad(m_1<m_2<\cdots)$$

时成立. 那末

$$\varepsilon^2\sum_1^{\infty}\frac{1}{m_k}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}[S_n(x)-\sigma_n(x)]^2<\infty.$$

設 $\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots$, $\varepsilon_n\to0$. 設适合

$$\varepsilon_i>|\sigma_n(x)-S_n(x)|\geqslant\varepsilon_{i+1}$$

的一切 n 为 m_{i1}, m_{i2}, $\cdots$. 由上述,級数 $\sum_k\frac{1}{m_{ik}}$ 都是收斂的. 我們不妨假設 $\sum_k\frac{1}{m_{ik}}<2^{-i}$, 这是除去有限个项可以做到的.因此, $\sum_i\sum_k m_{ik}^{-1}<\sum 2^{-i}\leqslant1$; 余下的一切自然数 $\{m_k\}=\{n\}-\{m_{i,k}\}$ 的密度是 1, 并且

$$\lim S_{m_k}(x)=\lim\sigma_{m_k}(x).$$

証明完毕.

3. 富理埃級数及其共軛級数的概收斂

$\mathfrak{S}[f]$ 和 $\tilde{\mathfrak{S}}[f]$ 的概收斂是互相随伴着的,尽管后者可能不是一个富理埃級数.

定理 1 假如 $\mathfrak{S}[f]$ 在点集 E 上收斂,那末 $\tilde{\mathfrak{S}}[f]$ 在 E 上概收斂.

我們将通过"稳定收斂"的概念,来証明定理 1. 設 $\sum u_n(x)$ 是一函数級数, $S_n(x)=u_0(x)+\cdots+u_n(x)$. 假如在一定点 x_0, 有常数 S, 对于任一正数 ε, 有常数 n_0, 当 $n\geqslant n_0$, $h=O\left(\frac{1}{n}\right)$ 时,成立着

$$|S_n(x_0+h)-S|<\varepsilon,$$

那末我們說級数 $\sum u_n(x)$ 在 $x=x_0$, **稳定地收斂于** S.

定理 2 余弦級数 $\sum a_n\cos nx$ 在 $x=0$ 稳定收斂于 S 的充要条件是 $\sum a_n$ 收斂于 S. 正弦級数 $\sum b_n\sin nx$ 在 $x=0$ 稳定收斂于 0 的充要

条件是

$$b_1+2b_2+\cdots+nb_n=o(n).$$

【証明】 写着 $\lambda(t)=e^{it}$, $S_n(t)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\lambda(\nu t)$, 那末

$$S_n(\alpha_n)=\sum_{\nu=0}^{n-1}S_\nu(0)\Delta\lambda(\nu\alpha_n)+S_n(o)\lambda(n\alpha_n).$$

当 $n\alpha_n=O(1)$ 时, $\{\Delta\lambda(\nu\alpha_n)\}$ 成一正則的綫性变換, 所以 $S_\nu(0)\to S$ 的話, $S_n(\alpha_n)\to S$. 級数 $\sum a_n$ 收斂于 S 对于 $\sum a_n\cos nx$ 在 $x=0$ 穩定收斂于 S 显然是必要的.

其次, 置 $S(x)=\frac{\sin x}{x}$, $S_n(\alpha_n)=\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu\sin\nu\alpha_n$, 那末

$$\begin{aligned}S_n(\alpha_n)&=\alpha_n\sum_{\nu=1}^{n}\nu b_\nu S(\nu\alpha_n)\\&=\alpha_n\sum_{\nu=1}^{n-1}(b_1+2b_2+\cdots+\nu b_\nu)\Delta S(\nu\alpha_n)\\&\quad+\alpha_n(b_1+\cdots+nb_n)S(n\alpha_n).\end{aligned}$$

設 $b_1+2b_2+\cdots+\nu b_\nu=\varepsilon_\nu\nu$, $\varepsilon_\nu\to 0$, 則因 $\Delta S(\nu\alpha_n)=O\left(\frac{1}{\nu}\right)$,

$$|S_n(\alpha_n)|\leqslant|\alpha_n|\left\{\sum_{\nu=1}^{n-1}|\varepsilon_\nu|\cdot|\Delta S(\nu\alpha_n)|+|\varepsilon_n|\cdot|S(n\alpha_n)|\right\}=o(1).$$

最后証明条件 $\varepsilon_\nu=o(1)$ 的必要性. 写着 $\sigma(x)=[S(x)]^{-1}$, $\alpha_n=\frac{1}{n}$, 我們見到

$$\varepsilon_n=\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu\sin\nu\alpha_n\,\sigma(\nu\alpha_n)=\sum_{\nu=1}^{n-1}S_\nu(\alpha_n)\Delta\sigma(\nu\alpha_n)+S_n(\alpha_n)\sigma(n\alpha_n).$$

我們还应該注意, 我們不妨假設

$$0<\delta\leqslant n\alpha_n\leqslant\pi-\delta.$$

由于 $\Delta\sigma(\nu\alpha_n)=O(\alpha_n)$, 所以从上式得到 $\varepsilon_n=o(1)$. 定理証毕.

系 1 置 $A_n(\theta)=a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta$; $B_n=-a_n\sin n\theta+b_n\cos n\theta$. 三角級数 $\sum A_n(\theta)$ 在点 $\theta=\theta_0$ 穩定地收斂于 S 是必須而且只須下述两事: (i) $\sum A_n(\theta_0)$ 收斂于 S, (ii) $B_1(\theta_0)+2B_2(\theta_0)+\cdots+nB_n(\theta_0)=o(n)$.

系 2 系 1 中的 (ii) 可用下列条件 (iii) 来代替. (iii) 存在如下

的 $\{\alpha_n\}$: $0<\delta\leqslant n\alpha_n\leqslant\pi-\delta$, 当 $n\geqslant\nu\to\infty$ 时, $S_\nu(\theta_0+\alpha_n)\to S$.

【証明】 我們只要証明 (i) 和 (iii) 的充分性就好了. 我們不妨假設 $\theta_0=0$. 由(i)和定理2的前半, $\sum A_n(x)$ 的"余弦部分"在 $x=0$ 稳定收斂于 S. 由(iii)和定理2的后半,

$$b_1+2b_2+\cdots+nb_n=o(n).$$

从而 $\sum b_n\sin nx$ 在 $x=0$ 稳定地收斂. 因此, $\sum A_n(x)$ 在 $x=0$ 稳定地收斂于 S. 証明完毕.

在圓周角上求和 設 $S_n(z)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 是在圓 $|z|<1$ 内定义着的, $|z_0|=1$, $\hat{z}_0$ 是以 z_0 做頂点的任意的一个圓周角——单位圓 $|z|<1$ 的. 当 z 在 $\hat{z}_0$ 中趋近于 z_0 时, 假如

$$S_n(z)\to S(z), \quad \lim_{\substack{z\in\hat{z}_0\\ z\to z_0}} S(z)=S,$$

那末我們說: $\{S_n(z)\}$ 于 $z=z_0$ 可以在圓周角中求和.

假如 $S_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n}\{S_\nu(z_0)-S_{\nu-1}(z_0)\}z^\nu$ $(S_{-1}=0)$, 那末当 $\lim_{n\to\infty}S_n(z_0)=S$ 时, $\{S_n(z)\}$ 于 z_0 可以在圓周角中求和.

事实上, 設 $z_\nu\in\hat{z}_0$, $z_\nu\to z_0$, 則对于 $\{S_n(z_0)\}$, 我們見到如下的綫性变换:

$$(1-z_\nu)\sum_{0}^{\infty}S_n(z_0)z_\nu^n=S_n(z_\nu),$$

这里 $|1-z_\nu|\sum|z_\nu|^n=|1-z_0|\cdot\{1-|z_\nu|\}^{-1}$ 小于一个常数. 因此得到上述結果.

但是, 这里的 $S(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu(z_0)z^\nu$ 是 z 的幂級数; 假如 $S(z)$ 不是 z 的幂級数, 那末尽管 $\lim_{n\to\infty}S_n(z_0)=S$, $\{S_n(z)\}$ 未必可以在 $\hat{z}_0$ 上求和. 例如設 $z_0=1$, 則当 z 在 $\hat{z}_0$ 中趋近于1时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}r^n=\operatorname{Im}\left\{\log\frac{1}{1-z}\right\}=\arg\frac{1}{1-z}$$

无一定极限, 尽管 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}$ 在 $0<\theta<\pi$ 上成立.

另一方面, 我們有如下的

定理 3 假如富理埃級数 $\sum A_n(\theta)$ 在 $\theta=\theta_0$ 稳定地收斂于 S，那末調和函数 $\sum A_n(\theta)r^n$，当 $z=re^{i\theta}$ 在 $(e^{i\theta_0}=z_0)\hat{z}_0$ 中趋近于 z_0 时，趋近于 S.

【証明】 不妨假設 $\theta_0=0$，那末 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\frac{a_0}{2}=S$，还有 $\sum_{\nu=1}^{n}\nu b_\nu=o(n)$．我們要在 $\hat{z}_0$——以 1 为頂点的一个圓周角——中，当 $z\to z_0$ 时，証明

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu r^\nu\cos\nu\theta\to S,$$

$$v(r,\theta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu r^\nu\sin\nu\theta\to 0.$$

从 $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收斂，就知道 $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$，当 $z\in\hat{z}_0$, $z\to z_0$ 时，收斂于 S，从而它的实部 $u(r,\theta)\to S$ $(z\in\hat{z}_0,\ z\to z_0)$，另一方面，置 $re^{i\psi}=\zeta$，則从

$$v(r,\theta)=\int_0^\theta\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu b_\nu r^\nu\cos\nu\psi\right]d\psi=\int_0^\theta\operatorname{Re}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu b_\nu\zeta^\nu\right\}d\psi$$
$$=\int_0^\theta\operatorname{Re}\left\{(1-S)\sum_{\nu=0}^{\infty}(b_1+2b_2+\cdots+\nu b_\nu)\zeta^\nu\right\}d\psi$$

得到——$z=re^{i\theta}\in\hat{z}_0$ 的話——

$$|v(r,\theta)|\leqslant|\theta|\cdot|1-r|o(1-r)^{-2}=o\left(\frac{|\theta|}{1-r}\right)=o(1).$$

証明完毕.

定理 4 假如富理埃級数 $\sum A_n(\theta)$ 在具有正測度 $|E|$ 的点集 E 上收斂，那末在 E 上，$\sum A_n(\theta)$ 几乎处处稳定地收斂.

【証明】 不妨假設 $\sum A_n(\theta)$ 在 E 上匀斂，我們只要証明：它在 E 的任一全密点 θ 稳定收斂就够了．首先証明对于 θ，存在如下的 $\{\alpha_n\}$：

$$0<n\alpha_n\to\frac{1}{2}\pi,\ \theta+\alpha_n\in E\quad(n=1,2,\cdots).$$

事实上，E 在 $\left(\theta+\frac{\pi}{2}h,\ \theta+\frac{\pi}{2}h+\eta h\right)$ $(\eta>0)$ 中的平均密度，当 $h\to0$ 时，趋近于 1．由是可知，在 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}+\eta$ 之間，必有如下的 λ_n：

$$\theta \pm \frac{\lambda_n}{n} \in E \quad (n > n_0).$$

令 $\eta \to 0$，則得 $\{\alpha_n\}$ 如上述．由是，当 n 和 ν 都趋向于 ∞ 时，

$$S_\nu(\theta+\alpha_n) - S(\theta+\alpha_n) \to 0,\ S(\theta+\alpha_n) - S(\theta) \to 0.$$

从而 $S_\nu(\theta+\alpha_n) \to S(\theta)$．这样，定理 2 的系 2 就能完成定理 4 的証明．

【定理 1 的証明】 由定理 4，我們不妨假設 $\mathfrak{S}[f] = \sum A_n(\theta)$ 在 E 上穩定地收斂．由定理 3，調和函数 $u(r, \theta) = \sum A_n(\theta) r^n$ 在 E 的任何点，具有圓周角上的极限値．此时，共軛調和函数

$$v(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) r^n$$

在 E 上几乎到处在圓周角上可以求和（証明見下节定理 4）．由定理 2，在 E 上几乎处处成立着 $B_1(\theta) + 2B_2(\theta) + \cdots + nB_n(\theta) = o(n)$．$v(r, \theta)$ 的可以求和包含着 $\sum B_n(\theta)$ 可用阿培耳求和法求和．因此，級数 $\sum B_n(\theta)$ 在 E 上几乎处处收斂．定理 1 証明完毕．

我們可以从函数 f 的性质来保証 $\mathfrak{S}[f]$ 的概收斂．設 $f \in L(0, 2\pi)$．假如

$$\int_0^h \{f(\theta+t) - f(\theta-t)\} dt = o\left(\frac{|h|}{\log \frac{1}{|h|}}\right) \quad (h \to 0)$$

关于 θ 均匀地成立，我們称 f 滿足**沙勒姆**（R. Salem）**条件**．沙勒姆于 1954 年在荷兰的杂志上，发表了如下的

定理 5 假如 f 滿足沙勒姆条件，那末 $\mathfrak{S}[f]$ 概收斂．

1955 年，佐藤于日本的学士院紀事上指出：滿足沙勒姆条件的 f 在 f 的勒貝格点 θ，$\mathfrak{S}[f;\theta]$ 收斂．1962 年，匈牙利的福罗伊特(G. Freud) 获得沙勒姆級数 $\mathfrak{S}[f]$ 收斂的充要条件（德国 Math. Zeits. 78），定理如下：

定理 6 設 f 滿足沙勒姆条件，那末 $\mathfrak{S}[f;\theta_0]$ 收斂的充要条件是

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(\theta_0+t) dt = f(\theta_0).$$

定理 6 包含了定理 5，而是下述定理的一个結果：

定理 7 設 $f\in L(0, 2\pi)$, $F(\theta)$ 是 f 的不定积分, 在 $[a, b]$ 上均匀地滿足沙勒姆条件

$$F(\theta+h)+F(\theta-h)-2F(\theta)=o\left(\frac{h}{\log\frac{1}{h}}\right)\quad(h\to 0),$$

那末在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上, 均匀地成立着

$$\lim_{0<|nh|<1}\left\{\frac{1}{h}\int_0^h f(\theta+t)dt-S_n(f;\theta)\right\}=0\quad(h\to 0).$$

这里 $S_n(f;\theta)$ 是 $\mathfrak{S}[f]$ 的部分和.

引理 1 設 $\theta\pm h\in[a,b]$, $\Omega(g,[a,b],\delta)=\sup\limits_{|h|<\delta}|g(\theta+h)+g(\theta-h)-2g(\theta)|$, 当 $g(\theta+2\pi)=g(\theta)$ 时, 簡写

$$\Omega^*(g;\delta)=\Omega(g, (-\infty, \infty), \delta).$$

設 $[a, b]\subset[0, 2\pi]$, $g(\theta)\in L(0, 2\pi)$, $g(\theta)\in C[a, b]$, 那末对于足够小的正数 δ, 存在如下的 $[\xi_1, \xi_2]$ 和 $g_\delta(\theta)$:

$$[a+\delta, b-\delta]\subset[\xi_1, \xi_2]\subset[a, b],$$

$$g_\delta(\theta)=g(\theta)\ (\xi_1\leqslant\theta\leqslant\xi_2),\quad g_\delta(\theta)\in C''[\xi_2, \xi_1+2\pi],$$

$$\Omega^*(g_\delta; h)\leqslant K(\delta)\ [\Omega(g, h)+h^2].$$

【証明】 函数 $G(\theta)=g(\theta)-\theta m_1$, $m_1=[g(a+\delta)-g(a)]/\delta$ 在区間 $[a, a+\delta]$ 上是連續的, 在区間的两端其值相等:

$$G(a)=G(a+\delta).$$

从而在 $(a, a+\delta)$ 中, 存在如下的点 ξ_1:

$$[G(\xi_1+h)-G(\xi_1)]\cdot[G(\xi_1-h)-G(\xi_1)]\geqslant 0.$$

因此, 下列两式必有一式成立:

$$0\leqslant G(\xi_1+h)-G(\xi_1)\leqslant[G(\xi_1+h)-G(\xi_1)]+[G(\xi_1-h)-G(\xi_1)],$$

$$0\geqslant G(\xi_1+h)-G(\xi_1)\geqslant[G(\xi_1+h)-G(\xi_1)]+[G(\xi_1-h)-G(\xi_1)].$$

从而

$$|g(\xi_1+h)-g(\xi_1)-m_1h|\leqslant\Omega(g, [a, b], h),$$

$$([\xi_1, \xi_1+h]\subset[a, a+\delta]).$$

同样可得,

$$|g(\xi_2+h)-g(\xi_2)-m_2h|\leqslant\Omega(g,h),$$
$$([\xi_2,\ \xi_2+h]\subset[b-\delta,\ b]),$$

这里 $m_2=[g(b)-g(b-\delta)]/\delta$.

現在定义 $g_\delta(\theta)$ 使它满足 $g_\delta'(\xi_1)=m_1$, $g_\delta'(\xi_2)=m_2$, 那末当 $\xi_2\leqslant\theta\leqslant\xi_1+2\pi$ 时,成立着

$$g_\delta(\theta+h)+g_\delta(\theta-h)-2g_\delta(\theta)=O(h^2),$$

当 $\xi_1\leqslant\theta\leqslant\xi_2$ 时,左边等于 $O(\Omega(g,h))$. 在 ξ_1 的附近,

$$\begin{aligned}&|g_\delta(\xi_1+h)+g_\delta(\xi_1-h)-2g_\delta(\xi_1)|\\&\quad\leqslant|g(\xi_1+h)-g(\xi_1)-m_1h|+|g(\xi_1-h)-g(\xi_1)+hm_1|\\&\quad\leqslant2\Omega(g;h).\end{aligned}$$

类似的关系,在 ξ_2 的附近也成立. 总結起来,

$$\Omega^*(g_\delta,h)\leqslant K_\delta(\Omega(g,h)+h^2).$$

引理1証毕.

【定理7的証明】 对于 $F(\theta)$, 由引理1, 存在着如下的 $F_1(\theta)$:

$$F_1(\theta)=F(\theta)\quad(a+\delta\leqslant\theta\leqslant b-\delta),$$
$$F_1(\theta+h)+F_1(\theta-h)-2F_1(\theta)=o\left(\frac{|h|}{\log\frac{1}{|h|}}\right)$$

在 $(-\infty,\infty)$ 上均匀地成立. 因此 $F_1(\theta)$ 是一全連續函数, $F_1'(\theta)\in L(0,2\pi)$. 由于 $F_1'(\theta)=f(\theta)\ (a+\delta\leqslant\theta\leqslant b-\delta)$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f-F_1';\theta)=0\quad(a+\delta\leqslant\theta\leqslant b-\delta)$$

均匀地成立. 因此,我們只要証明

$$\lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{h}\int_0^h F_1'(\theta+t)-S_n(F_1';\theta)\right\}=0$$

在 $a+\delta\leqslant\theta\leqslant b-\delta$ 上均匀地成立好了. 从所設的条件,存在

$$T_n(\theta)=\sum_{n=0}^{n}(a_n\cos n\theta+\beta_n\cos n\theta),$$

适合 $F_1(\theta)-T_n(\theta)=o(1/n\log n)$ $(-\infty<\theta<\infty)$. 因此,

$$F_1(\theta)-S_n(F_1;\theta)=F_1(\theta)-T_n(\theta)+T_n(\theta)-S_n(F_1;\theta)$$
$$=F_1(\theta)-T_n(\theta)+S_n(T_n-F_1;\theta)$$
$$=o\left(\frac{1}{n\log n}\right)\left[1+\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt\right]=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

利用下面的引理 2, 我們得到

$$\left|\frac{F_1(\theta+h)-F_1(\theta)}{h}-\frac{d}{d\theta}S_n(F_1;\theta)\right|\leqslant no\left(\frac{1}{n}\right)=o(1),$$

或是

$$\left|\frac{1}{h}\int_{\theta}^{\theta+h}F_1'(t)\,dt-S_n(F_1';\theta)\right|=o(1).$$

定理 7 因此証毕. 我們还要証明

引理 2 設在区間 $a\leqslant\theta\leqslant b$ 上, 阶不高于 n 的三角多項式 $t_n(\theta)$ 适合

$$|f(\theta)-t_n(\theta)|\leqslant\varepsilon_n,\quad \varepsilon_n\downarrow 0.$$

又設 $\Omega(f;\delta)$ 是 $f(\theta+h)+f(\theta-h)-2f(\theta)$ 当

$$[x-h,\,x+h]\subset[a,\,b],\quad |h|\leqslant\delta$$

时的最大絕对值, 那末对于 $\theta\in[a+\delta,\,b-\delta]$ 以及

$$0<\rho\leqslant|h|n\leqslant 1,$$

成立着不等式

$$\left|\frac{f(\theta+h)-f(\theta)}{h}-t_n'(\theta)\right|\leqslant C(\rho,\,\delta)n\left[\varepsilon_n+\Omega\left(f;\frac{1}{n}\right)\right].$$

【証明】 簡写 $\Omega(f;\delta)$ 为 $\Omega(\delta)$. 当 $\xi\geqslant 1$ 时, 我們証明 $\Omega(\xi\delta)\leqslant 4\xi^2\Omega(\delta)$. 事实上, 从恒等式

$$f(\theta+2h)+f(\theta-2h)-2f(\theta)$$
$$=[f(\theta+2h)+f(\theta)-2f(\theta+h)]+[f(\theta)+f(\theta-2h)-2f(\theta-h)]$$
$$+2[f(\theta+h)+f(\theta-h)-2f(\theta)]$$

得到 $\Omega(2\delta)\leqslant 4\Omega(\delta)$, 利用数学归納法得到 $\Omega(2^m\delta)\leqslant 2^{2m}\Omega(\delta)$. 假如 $2^m\leqslant\xi<2^{m+1}$, 那末

$$\Omega(\xi\delta)\leqslant\Omega(2^{m+1}\delta)\leqslant 4\cdot 2^{2m}\Omega(\delta)\leqslant 4\xi^2\Omega(\delta).$$

固定 θ,h 的函数 $\tau_n(\theta,h)=\{t_n(\theta+h)+t_n(\theta-h)-2t_n(\theta)\}\Big/\sin^2\dfrac{h}{2}$

是一个阶不高于 n 的三角多項式．从所設的不等式，得到

$$|\tau_n(\theta, h)| \leqslant [4\varepsilon_n + \Omega(|h|)] \Big/ \sin^2\frac{h}{2},$$

这里 $[\theta-h,\ \theta+h]\subset[a,\ b]$．当 $|h|\leqslant\frac{1}{n}$ 时，$\Omega(|h|)\leqslant\Omega\left(\frac{1}{n}\right)$；假如 $n|h|>1$，那末 $\Omega(|h|)=\Omega(n|h|n^{-1})\leqslant 4(nh)^2\Omega(n^{-1})$．总之，

$$\Omega(|h|)\leqslant\Omega(n^{-1})+4(nh)^2\Omega(n^{-1}).$$

因此

$$|\tau_n(\theta, h)| \leqslant [4\varepsilon_n+\Omega(n^{-1})] \Big/ \sin^2\frac{h}{2} + 4(\pi n)^2\Omega(n^{-1}).$$

設 $|\tau_n(\theta, h)|$ 当 $|h|\leqslant\delta$ 时，取最大值 $M=|\tau_n(\theta, h_0)|$，那末在区間 $|h|\leqslant\frac{1}{2}\delta$ 上，有常数 $G(\delta)$ 适合于

$$\left|\frac{d\tau_n(\theta, h)}{dh}\right|\leqslant nG(\delta)M.$$

假如 $h\in\left[h_0-\frac{1}{2G(\delta)n},\ h_0+\frac{1}{2G(\delta)n}\right]$，那末此区間中有 h' 适合于

$$\tau_n(\theta, h)=\tau_n(\theta, h_0)+(h-h_0)\left[\frac{d\tau_n}{dh}\right]_{h=h'}.$$

末項的絕对值小于

$$\frac{1}{2G(\delta)n}\cdot nG(\delta)M=\frac{1}{2}M.$$

因此，当 $h\in\left[h_0-\frac{1}{2G(\delta)n},\ h_0+\frac{1}{2G(\delta)n}\right]$ 时，

$$|\tau_n(\theta, h)|>M-\frac{1}{2}M=\frac{1}{2}M.$$

但是，在长为 $\frac{1}{G(\delta)n}$ 的区間中，$|\tau_n(\theta, h)|$ 必取到小于

$$C(\delta)n^2[\varepsilon_n+\Omega(n^{-1})]$$

的值（見上面关于 $|\tau_n(\theta, h)|$ 的估計）．因此得到

$$\frac{1}{2}M<C(\delta)n^2[\varepsilon_n+\Omega(n^{-1})].$$

于不等式 $|\tau_n(\theta, h)|\leqslant 2C(\delta)n^2[\varepsilon_n+\Omega(n^{-1})]$，令 $h\to 0$，即得

$$|t_n''(\theta)| \leqslant 2C(\delta)n^3[\varepsilon_n + \Omega(n^{-1})].$$

利用此結果，就可以完成引理 2 的証明.

由假設 $[f(\theta)-t_n(\theta)]/\varepsilon_n$ 和 $[f(\theta+h)-t_n(\theta+h)]/\varepsilon_n$ 都是絕对值小于 1 的数，記它們做 δ_1 和 δ_2. 因此

$$\frac{f(\theta+h)-f(\theta)}{h} - t_n'(\theta) = \frac{h}{2} t_n''(\theta+\delta' h) + \frac{\varepsilon_n}{h}(\delta_1+\delta_2),$$

这里 $|\delta'|<1$. 从 $t_n''(\theta)$ 的估計，得到引理的結果.

一般的直交函数級数 $\sum c_n\varphi_n(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 当 $\sum c_n^2 \log^2 n$ 收斂时，概收斂. 就三角級数来說，概收斂因子 $\log^2 n$ 还可以減小. 潑賴斯耐*) 証明了如下的

定理 8 假如 $\sum(a_n^2+b_n^2)\log n$ 收斂，那末三角級数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

概收斂.

【証明】 我們不妨假設 $a_0=a_1=b_1=0$. 記此三角級数的部分和为 $s_0, s_1, s_2, \cdots$. 写着

$$\Phi_{mn} = \max(s_m - s_m,\ s_{m+1}-s_m,\ \cdots,\ s_n - s_m),$$

$$\varphi_{mn} = \min(s_m - s_m,\ s_{m+1}-s_m,\ \cdots,\ s_n - s_m),$$

那末 $\Phi_m = \max(o, s_2, \cdots, s_n) = \sum_{\nu=2}^{p(x)}(a_\nu\cos\nu x + b_\nu\cos\nu x) \geqslant 0$. 关于这个 $p(x)$，我們計算积分

$$J = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\sum_{k=2}^{p(x)}\frac{\cos k(t-x)}{\sqrt{\log k}}\,dx\right]^2 dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\sum_{k=2}^{p(x)}\frac{\cos k(t-x)}{\sqrt{\log k}}\,dx\right]\left[\int_0^{2\pi}\sum_{m=2}^{p(y)}\frac{\cos m(t-y)}{\sqrt{\log m}}\,dy\right]dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left[\int_0^{2\pi}\sum_{k=2}^{p(x)}\frac{\cos k(t-x)}{\sqrt{\log k}}\sum_{m=2}^{p(y)}\frac{\cos m(t-y)}{\sqrt{\log m}}\right]dt\right\}dx\,dy$$

$$= \pi\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=2}^{\min(p(x),\,p(y))}\frac{\cos k(x-y)}{\log k}\,dx\,dy.$$

---

*) 定理 8 同时又被柯尔莫哥洛夫 (Колмогоров) 和謝里維尔斯托夫 (Селиверстов) 所发見. 这是第二章 § 8 的最后的定理.

我們見到

$$J=\pi\iint_{p(x)<p(y)}+\pi\iint_{p(x)>p(y)}\leqslant 2\pi\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=2}^{p(y)}\frac{\cos k(x-y)}{\log k}\right|dx\,dy.$$

記 $D_n(x)$ 和 $K_n(x)$ 分别做狄里克萊和費耶的核，經过两次阿培耳变换，我們見到

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=2}^{n}\frac{\cos kx}{\log k}\right|dx\leqslant\sum_{\nu=0}^{n-2}(\nu+1)\Delta^2\frac{1}{\log\nu}\int_0^{2\pi}K_\nu(x)\,dx$$

$$+n\Delta\frac{1}{\log n}\int_0^{2\pi}K_{n-1}(x)dx+\frac{1}{\log n}\int_0^{2\pi}|D_n(x)|\,dx$$

$$<O(\log n/\log n)=O(1).$$

由是 J 小于一个絕对常数 A. 写着

$$F_n(x)=\sum_{\nu=2}^{n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)\sqrt{\log\nu},$$

那末

$$I=\int_0^{2\pi}\Phi_{1n}(x)\,dx=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi}F_n(t)\sum_{k=2}^{p(x)}\frac{\cos k(t-x)}{\sqrt{\log k}}\,dt\right]dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\pi}F_n(t)\left\{\int_0^{2\pi}\sum_{k=2}^{p(x)}\frac{\cos k(t-x)}{\sqrt{\log k}}\,dx\right\}dt.$$

应用許瓦茲不等式，

$$I^2\leqslant\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}F_n^2(t)\,dt\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\sum_{k=2}^{p(x)}\frac{\cos k(t-x)}{\sqrt{\log k}}\,dx\right]^2dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{n}(a_k^2+b_k^2)\log k\cdot J<\frac{A}{\pi}\sum_{k=2}^{n}(a_k^2+b_k^2)\log k.$$

由是，得到不等式

$$0\leqslant\int_0^{2\pi}\Phi_{1n}(x)dx\leqslant K\sqrt{\sum_{k=2}^{n}(a_k^2+b_k^2)\log k}.$$

这个結果，特别当 $a_0=a_1=b_1=\cdots=a_m=b_m=0$ 时成立. 由是

$$0\leqslant\int_0^{2\pi}\Phi_{mn}(x)dx\leqslant K\sqrt{\sum_{k=m+1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\log k}.$$

同样可証

$$0\geqslant\int_0^{2\pi}\varphi_{mn}(x)dx>-K\sqrt{\sum_{k=m+1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\log k}.$$

当 $n\to\infty$ 时，$\Phi_{mn}(x)$ 单調地趋向于一个函数 $\Phi_m(x)$；对于 k，有 m_k 适合

$$\int_0^{2\pi}\Phi_{m_k}(x)\,dx<2^{-k}.$$

关于 k 相加，得收斂級数 $\sum\int_0^{2\pi}\Phi_{m_k}(x)dx$. 由富弼尼定理，級数

$$\sum\Phi_{m_k}(x)$$

几乎处处收斂. 对于 $\varepsilon>0$，存在 m_k，

$$0\leqslant\Phi_{m_k}(x_0)<\varepsilon\quad(x_0\in E_1,\ E_1\subset[0,\ 2\pi]),$$

从而当 $n>m_k$ 时，$0\leqslant\Phi_{m_kn}(x_0)<\varepsilon$. 同样可得

$$0\geqslant\varphi_{m_kn}(x_0)>-\varepsilon\quad(n>m_k,\ x_0\in E_2,\ E_2\subset[0,\ 2\pi]).$$

假如 $x_0\in E_1E_2$，那末

$$|S_n(x)-S_{m_k}(x)|<\varepsilon\quad(n>m_k).$$

由于 $|E_1|=2\pi$，$|E_2|=2\pi$，$|E_1E_2|=2\pi$. 所以极限

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

几乎处处存在.

4. 利用一級数的性质来研究三角級数

設 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 上是正則的解析函数. 設 $T(\theta_0)$ 是以 $e^{i\theta_0}$ 做頂点的一个圓周角区域，簡称它做圓周角. $f(z)$ 在 $T(\theta_0)$ 上的一切函数值成一复数的集 $f(T(\theta_0))$.

定理 1 設 $u(z)$ 是 $|z|<1$ 上的調和函数，E 是 $|z|=1$ 上的一个正測度的点集. 假如在 E 的任一点 θ_0，$f(T(\theta_0))$ 是有界，那末在 E 上，$u(z)$ 几乎处处具有圓周角极限值.

【証明】 我們假設 E 是閉的，$T(\theta_0)$ 关于通过 θ_0 的半徑是对称的，并且不妨設一切 $T(\theta_0)$ 都可以相重而符合. 从 $T(\theta_0)$ 除去圓 $|z|\leqslant1-\frac{1}{2}\delta_0(0<\delta_0<1)$ 的內部，得一区域 $\tau(\theta_0)$. 記

$$v=\sum_{\theta\in E}\tau(\theta),$$

v 是一个开集. 設在 v 上，$|u(z)|\leqslant1$.

单位圓周上的点 $e^{i\theta}$ 能使 $\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}$ 属于 v 的 θ 的全体，成一开集 E_n. 当 n 足够大时，E_n 含有 E. 我們定义两个普阿松积分 $\varphi_n(z)$ 和 $\psi_n(z)$；它們分别是从函数

$$\varphi_n(\theta)=\begin{cases}u\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right) & (\theta\in E_n),\\ 0 & (\theta\overline{\in} E_n),\end{cases}$$

$$\psi_n(\theta)=\begin{cases}0 & (\theta\in E_n),\\ u\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right) & (\theta\overline{\in} E_n)\end{cases}$$

所作成的. 因此,在 $|z|<1$ 上,成立着

$$u\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)z\right]=\varphi_n(z)+\psi_n(z).$$

由于 $|\varphi_n|\leqslant 1$ $(n=2, 3, \cdots)$，一切函数 φ_n 在圓 $|z|\leqslant 1-\varepsilon<1$ 上是等度連續的（$\varphi_n(z)$ 的一級数展开中的系数都 $\leqslant 1$，$\frac{\partial\varphi_n}{\partial\rho}$ 和 $\frac{\partial\varphi_n}{\partial\theta}$ 在 $|z|\leqslant 1-\varepsilon$ 上都是均匀有界）. 从而,有子函数列 $\varphi_{n_k}(z)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 在圓 $|z|\leqslant 1-\varepsilon$ 上匀斂于一个函数 $\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 上是調和的. 从而 $\psi_n(z)\to\psi(z)$，$\psi(z)$ 在 $|z|<1$ 上是調和的.

$$u(z)=\varphi(z)+\psi(z).$$

函数 $\varphi(z)$ 在 $|z|=1$ 上几乎处处具圓周角极限值 $\varphi(\theta)$. 事实上, $\mathfrak{S}[\varphi]$ 的費耶平均值 $\sigma_n(\theta)\to\varphi(\theta)$. 比方說: $\sigma_n(0)\to\varphi(0)$, 那末当 $z_n\in T(0)$，$z_n\to 1$ 时，$|1-z_n|/1-|z_n|\leqslant K$，

$$\varphi(z_n)=(1-z_n)^2\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)\sigma_\nu(0)z_n^\nu,$$

$$|\varphi(z_n)-\varphi(0)|\leqslant|(1-z_n)^2\sum_{\nu=0}^{N}(\nu+1)[\sigma_\nu(0)-\varphi(0)]z_n^\nu|$$
$$+\varepsilon_N\sum(\nu+1)|1-z_n|^2\cdot|z_n^\nu|,$$

这里 $\varepsilon_N=\max\limits_{\nu>N}|\sigma_\nu(0)-\varphi(0)|=o(1)$. 因此,

$$\limsup_{n\to\infty}|\varphi(z_n)-\varphi(0)|\leqslant\varepsilon_N\limsup\frac{|1-z_n|^2}{[1-|z_n|]^2}\leqslant\varepsilon_N K^2$$
$$=o(1)\quad(N\to\infty).$$

所以，$\varphi(z)$ 在 $|z|=1$ 上几乎处处具有圆周角极限值.

我們还要証明 $\psi(z)$ 也具有上述 $\varphi(z)$ 的性质. 假如我們能作成如下的函数 $\chi(z)$，在 ν 上，$|\psi(z)|\leqslant\chi(z)$，在点集 $\{e^{i\theta}\}(\theta\in E)$ 上，$\chi(z)$ 几乎处处具有圓周角极限值 0，那末定理的証明可以完毕. 事实上，設 θ_0 是 E 的一个密度点，$\chi(z)$ 在点 $e^{i\theta_0}$ 具有圓周角极限值，$T(\theta_0)$ 是一个固定的圓周角，則 $\sum\limits_{|\theta-\theta_0|<\eta}\tau(\theta)$ 含有 $T(\theta_0)$ 中 $e^{i\theta}$ 附近的一切点. 从而不等式 $|\psi(z)|\leqslant\chi(z)$ 在 $T(\theta_0)$ 中 $e^{i\theta}$ 附近成立. 由于

$$\lim_{\substack{z\in T(\theta_0)\\ z\to e^{i\theta_0}}}\chi(z)=0,$$

所以 $\psi(z)$ 在 $e^{i\theta_0}$ 的圓周角极限值等于 0.

現在作成一个具有上述性质的 $\chi(z)$. 設 $k_E(\theta)$ 是 E 上的特征函数——当 $\theta\in E$ 时，$k_E(\theta)=1$；$\theta\overline{\in}E$ 时，$k_E(\theta)=0$，置

$$\chi_1(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)(1-k_E(t))}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}dt\quad (z=re^{i\theta}).$$

这个 $\chi_1(z)$ 在 $|z|=1$ 上几乎处处具有圓周角极限值；在 E 上，它的极限值是 0. 在 $|z|<1$ 上，$\chi_1(z)>0$. 在 v 的境界 $\bar{v}-v$ 上，从 $\psi_n(z)$ 的定义，知道 $|\psi_n(z)|\leqslant 2$. 在点集

$$(\bar{v}-v)-E$$

上，$\chi_1(z)>0$，从而有正常数 M 使 $M\chi_1(z)\pm\psi_n(z)\geqslant 0$ 成立. 当 v 中的 z 趋近于 E 的一点时，我們見到

$$\liminf\{M\chi_1(z)\pm\psi_n(z)\}=\underline{\lim}\,M\chi_1(z)\geqslant 0,$$

由調和函数的极值原理，$M\chi_1(z)\pm\psi_n(z)\geqslant 0$ 在 v 中成立. 因此，$|\psi_n|\leqslant M\chi_1$ 在 v 上成立，令 $n\to\infty$，就得到

$$|\psi(z)|\leqslant M\chi_1(z)\quad (z\in v).$$

取 $\chi(z)=M\chi_1(z)$，$\chi(z)$ 满足前述条件而定理 1 証毕.

系 設 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 上是一个正則的解析函数，E 是 $|z|=1$ 的一个点集，当 $\theta\in E$ 时，$f(T(\theta))$ 是有界，那末在 E 上，$f(z)$ 几乎处处具有圓周角极限值.

定理 2 在 $|z|<1$ 上的正則函数 $f(z)$，假如它在 $|z|=1$ 的一个

十乙

正测度的点集 E 上具有圆周角极限値 0，那末 $f(z)\equiv 0$.

【証明】 从 $z=1$ 作圓 $|z|<\delta<1$ 的两根切綫，这两切綫結合两切点間的連綫，成二等边三角形 Δ_1，两切綫結合落在 Δ_1 外部的 $|z|=\delta$ 的圓弧圍成一个灯炮形区域 $\Omega(0)$，将 $\Omega(0)$ 关于 $z=0$ 回轉 θ 的角，得 $\Omega(\theta)$. 当 $\theta\in E$ 时，$f(\Omega(\theta))$ 是有界的. 置

$$U=\sum_{\theta\in E}\Omega(\theta),$$

我們不妨假設 E 是閉的，并且不妨假設 $f(U)$ 是有界. 設 $z=z(\zeta)$ 共形映照 z 上的 U 于 $|\zeta|<1$，則函数 $f(z(\zeta))$ 在 $|\zeta|<1$ 上是有界，在 $|\zeta|=1$ 上，几乎处处具有圓周角极限値 0. 因此 $f(z(\zeta))$ 的实部和虛部的普阿松积分都是 0，从而 $f(z(\zeta))\equiv 0$，$f(z)\equiv 0$. 証明完毕.

假如点集 $f(T(\theta_0))$ 沒有在全平面上处处稠密，就是說：至少有一个圓 K，K 与 $f(T(\theta_0))$ 无共通点，那末我們說，$f(z)$ 在 θ_0 的布值是非全面的.

定理 3 設 $E\subset[0, 2\pi]$，$|E|>0$. 假如正則函数 $f(z)$ $(|z|<1)$ 在 E 的各点 θ 的布值，都是非全面的，那末 $f(z)$ 几乎处处在 E 的各点 $\theta(e^{i\theta})$ 具有圓周角极限値.

【証明】 設 $\theta\in E$，圓 $|\zeta-\alpha|<\rho$ 中无 $f(T(\theta))$ 的值. 不妨假設 α 和 ρ 都是有理的——ρ 是有理数，α 的实部和虛部都是有理数. 由是，固定 α 和 ρ，圓 $|\zeta-\alpha|<\rho$ 中不含有 $f(T(\theta))$ 的任何值的一切 θ，成 E 的一个子集 $E_{\alpha,\rho}$. 这样，$E=\sum E_{\alpha,\rho}$.

設 $\theta\in E_{\alpha,\rho}$，則函数 $1/(f(z)-\alpha)$ 在 $T(\theta)$ 上是有界. 我們不妨假設 $f(z)-\alpha$ 在 $|z|<1$ 上无零点，不然我們将圓 $|\zeta-\alpha|<\rho$ 略事移动，略事縮小，$1/(f(z)-\alpha)$ 在 $T(\theta)$ $(\theta\in E_{\alpha,\rho})$ 中仍为有界，而在 $|z|\leqslant 1$ 上是正則的. 由定理 1，此函数在 $E_{\alpha,\rho}$ 上几乎处处具有圓周角极限値，从而 $f(z)$ 也是如此. 由是 $f(z)$ 在 $E=\sum E_{\alpha,\rho}$ 上几乎处处具有圓周角极限値. 証明完毕.

定理 4 假如調和函数 $u(r,\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)r^n$ 在 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 中的一个点集 E 具有圓周角极限値，那末共軛調和函数

$$v(r, \theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) r^n$$

在 E 上几乎处处具有圓周角极限值.

【証明】 置 $z=re^{i\theta}$, $f(z)=u(r, \theta)+iv(r, \theta)$. 由于 $u(r, \theta)$ 在 E 上具有圓周角极限值, 所以 $f(T(\theta))$ $(\theta \in E)$ 的布值都不是全面的, 从而 $f(z)$ 在 E 上几乎处处具有圓周角极限值, 特别 $v(r, \theta)$ 是这样的. 証明完毕.

5. 平均連續性与概收斂

設 $E \subset [-\pi, \pi]$, E 与点 t 的距离記做 $\chi_E(t)$, 我們考慮两种积分

$$J_\lambda(\theta, f, E)=\int_0^{2\pi} \frac{f(t)\chi_E^\lambda(t)\,dt}{\left|2\sin\frac{1}{2}(\theta-t)\right|^{\lambda+1}} \quad (\lambda>0),$$

$$J_l(\theta, E)=\int_0^{2\pi} \frac{f(t)\{\log 1/\chi_E(t)\}^{-1}}{\left|2\sin\frac{1}{2}(\theta-t)\right|}\,dt.$$

首先建立下面的定理, 作为准备.

定理 1 設 $f(t) \in L(0, 2\pi)$, 則在 E 上 $J_\lambda(\theta, f, E)$ 几乎处处絕对收斂, 并且

$$\int_E |J_\lambda(\theta, f, E)|\,d\theta \leqslant \frac{2}{\lambda}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lambda+1}\int_0^{2\pi}|f(\theta)|\,d\theta.$$

假如 E 的任一余区間的长小于 1, 那末 $J_l(\theta, E)$ 在 E 上几乎处处絕对收斂, 并且

$$\int_E |J_l(\theta, E)|\,d\theta \leqslant A\int_0^{2\pi}|f(\theta)|\,d\theta \quad (A \text{ 絕对常数}).$$

【証明】 我們不妨假設 $f \geqslant 0$, 当 $t \in E$ 时, $\chi_E(t)=0$. 在 E 的一个余区間 (α, β) 上, $\chi_E(t)$ 从 $\chi_E(\alpha)=0$ 逐漸增大至 $\chi_E\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$, 然后逐漸減小至 $\chi_E(\beta)=0$. 由是,

$$\int_E J_\lambda(\theta, f, E)d\theta = \int_0^{2\pi} f(t)\chi_E^\lambda(t)\left\{\int_E \frac{d\theta}{\left|2\sin\frac{1}{2}(t-\theta)\right|^{\lambda+1}}\right\}dt$$

$$\leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lambda+1}\int_0^{2\pi} f(t)\chi_E^\lambda(t)\int_E \frac{d\theta}{|t-\theta|^{\lambda+1}}dt.$$

当 $t\in(\alpha, \beta)$——E 的余区間——时，最后的积分不大于

$$2\int_{\min(t-\alpha,\, \beta-t)}^{\infty} u^{-1-\lambda}du = \frac{2}{\lambda}[\min(t-\alpha, \beta-t)]^{-\lambda} = \frac{2}{\lambda}\frac{1}{\chi_E^\lambda(t)}.$$

由是

$$\int_E J_\lambda(\theta, f, E)d\theta \leqslant \frac{2}{\lambda}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lambda+1}\int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

从而 $J_\lambda(\theta, f, E)$ 在 E 上几乎处处絕对收斂.

假如$\lambda=0$, 那末当 $\alpha<t<\beta$ [(α, β) 是 E 的一个余区間, $\beta-\alpha<1$] 时，

$$\int_E J_l(\theta, E)d\theta \leqslant \frac{\pi}{2}\int_{(0, 2\pi)-E} f(t)\left[\log\frac{1}{\chi_E(t)}\right]^{-1}\int_E |t-\theta|^{-1}d\theta\, dt,$$

$$\int_E \frac{d\theta}{|t-\theta|} \leqslant 2\int_{\min(t-\alpha,\, \beta-t)}^{2\pi}\frac{du}{u} = 2\log 2\pi + 2\log\frac{1}{\chi_E(t)}$$

$$< A\log\frac{1}{\chi_E(t)}.$$

两式結合起来就得到

$$\int_E J_l(\theta, E)d\theta < \frac{\pi A}{2}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt.$$

証明完毕. 定理 1 是馬辛基維斯于 1938 年发表于波兰杂志上的.

定理 2 假如 $\mathfrak{S}[f]$ 的 f 在 E 上到处满足

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt = O\left(\frac{1}{\log\frac{1}{|h|}}\right) \quad (h\to 0),$$

那末 $\mathfrak{S}[f]$ 在 E 上几乎处处收斂.

【証明】 首先引入潑賴斯耐概收斂定理的一个結果：假如

$$\int_0^\pi \frac{|f(\theta+t)-f(\theta-t)|^2}{t}dt \in L(0, 2\pi),$$

那末 $\mathfrak{S}[f]$ 概收斂. 事实上，

$$\int_0^\pi \frac{dt}{t}\int_{-\pi}^{\pi}[f(\theta+t)-f(\theta-t)]^2 d\theta$$
$$=4\pi\int_0^\pi \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\sin^2 nt\,dt.$$

由于

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 nt}{t}dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\sum_{\nu=0}^{n}\sin(2\nu+1)t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{2}{2\nu+1}+\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{d}{dt}\frac{\sin t}{t}\cdot\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\cos(2\nu+1)t}{2\nu+1}dt$$
$$=\frac{1}{2}\log n+O(1),$$

所以上面的积分等于 $2\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)(\log n+O(1))$. 从而这个級数是收斂的，由潑賴斯耐的定理，$\mathfrak{S}[f]$ 概收斂.

对于很小的正数 $\delta(\delta<1)$, E 中存在完全子集 P, 当 $\theta\in P$, $|h|<\delta$ 时,

$$\left|\frac{1}{h}\int_0^h|f(\theta+t)-f(\theta)|\,dt\right|\leqslant\frac{M}{\log 1/|h|}\quad (M\text{ 与 }P\text{ 中的 }\theta\text{ 无关系}).$$

固定 n, 置 $M=n$, $\delta=\frac{1}{n}$, 記适合上述的 θ 的全体为 E_n, E_n 中含有完全点集 P_n 适合 $|E_n-P_n|<\frac{1}{n}$. 由于 $|E_n|\to E$, 所以我們不妨只在 P_n 上来考慮問題，并且仍写 P, M, δ 以代替 P_n, n, $\frac{1}{n}$. 設 $0<h<\delta$, 区間 $\left(\theta+\frac{1}{3}h,\ \theta+\frac{2}{3}h\right)$ 中的 u 适合

$$\xi(u)=|f(u)-f(\theta)|\log\frac{1}{u-\theta}>N$$

的全体成一点集 H, 我們見到

$$|H|\leqslant\frac{1}{N}\int_{\theta+\frac{h}{3}}^{\theta+\frac{2}{3}h}\xi(u)\,du\leqslant\frac{1}{N}\left|\log\frac{h}{3}\right|\int_{\theta+\frac{h}{3}}^{\theta+\frac{2}{3}h}|f(u)-f(\theta)|\,du$$

$$\leqslant\frac{hM}{N}\frac{\log\frac{h}{3}}{\log h}<\frac{2hM}{N}.$$

同样，$|f(u)-f(\eta)|\log\frac{1}{\eta-u}>N\left(\eta=\theta+\frac{1}{3}h\right)$ 的一切 u 所成的点集 H_1，它的测度小于 $2hM/N$。假如 $N=12M$，那末

$$2\times 2hM/N=\frac{1}{3}h.$$

这是区間 $\left[\theta+\frac{h}{3},\ \theta+\frac{2}{3}h\right]$ 的长；因此，区間中必有一点 u_0 适合

$$|f(\theta)-f(u_0)|\leqslant N/\log\frac{1}{u_0-\theta},\quad |f(\eta)-f(u_0)|\leqslant N\log\frac{1}{\eta-u_0}.$$

結合起来，得到

$$\left|f\left(\theta+\frac{h}{3}\right)-f(\theta)\right|<\frac{2N}{\log\frac{1}{h}},$$

这里 $\theta\in P$. 設在 P 上 $\phi(\theta)=f(\theta)$，在 P 的任一余区間上，$\phi(\theta)$ 是一次函数，写着 $f(\theta)=\phi(\theta)+\psi(\theta)$. 在 P 的任一密度点 θ，我們能証积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\psi(t)}{\theta-t}\right|dt$$

几乎处处是有限的. 設 $J_1,\ J_2,\ \cdots$ 是 P 的余区間的全部. 当 $t\in P$ 时，$\psi(t)=0$. 設 t 和 P 的距离是 $\chi(t)$，J_ν 是 $(\alpha_\nu,\ \beta_\nu)$，那末，从 ϕ 的定义以及有关 f 的假設，得到

$$\int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu}|\psi(t)|\,dt=\int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu}|\psi(t)-\psi(\alpha_\nu)|\,dt$$
$$\leqslant\int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu}|f(t)-f(\alpha_\nu)|\,dt+\int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu}|\phi(t)-\phi(\alpha_\nu)|\,dt<\frac{AM(\beta_\nu-\alpha_\nu)}{\log 1/(\beta_\nu-\alpha_\nu)}.$$

当 θ 是 P 密度点时，可取 $(\alpha_\nu,\ \beta_\nu)$ 足够地接近于 θ 使——在 θ 的右边来取的話——

$$\alpha_\nu-\theta>\beta_\nu-\alpha_\nu.$$

因此，当 $\alpha_\nu<t<\beta_\nu$ 时，

$$\int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu}\frac{|\psi(t)|}{|\theta-t|}\,dt<\frac{1}{\alpha_\nu-\theta}\int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu}|\psi(t)|\,dt\leqslant\frac{2AM}{t-\theta}\,\frac{\beta_\nu-\alpha_\nu}{\log\frac{1}{\chi(t)}}$$

$$<2AM\int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu}\frac{\left[\log\frac{1}{\chi(t)}\right]^{-1}}{|t-\theta|}\,dt.$$

記 θ 与 (α_ν, β_ν) 的距离为 d_ν，写着 $|I_\nu|=\beta_\nu-\alpha_\nu$，$I_\nu=(\alpha_\nu, \beta_\nu)$，那末

$$\sum_{d_\nu>|I_\nu|}\int_{I_\nu}\frac{|\psi(t)|}{|\theta-t|}dt<2AM\sum_{d_\nu>|I_\nu|}\int_{I_\nu}\frac{\left[\log\dfrac{1}{\chi(t)}\right]^{-1}}{|t-\theta|}dt.$$

由定理1，$\left[\log\dfrac{1}{\chi(t)}\right]^{-1}\Big/|t-\theta|$ 在 $[0, 2\pi]$ 的积分几乎处处存在，从而积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\psi(t)|}{|t-\theta|}dt$$

在 E 上几乎处处存在.

由于 $\mathfrak{S}[f]=\mathfrak{S}[\phi]+\mathfrak{S}[\psi]$，$\phi$ 在 P 上均匀地满足李普希茲条件

$$\phi(\theta+h)-\phi(\theta)=O\left(\frac{1}{\log 1/|h|}\right),$$

而 ψ 满足狄尼条件，所以 $\mathfrak{S}[\phi]$ 和 $\mathfrak{S}[\psi]$ 在 P 上几乎处处收斂．从而 $\mathfrak{S}[f]$ 在 E 上概收斂．証明完毕.

我們称

$$\omega_1(\delta)=\omega_1(\delta; f)=\sup_{0<h\leq\delta}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta+h)-f(\theta)|\,d\theta$$

为 $f(\theta)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的**平均連續模**．定理2中的条件是一种平均連續性.

定理 3 当 $\omega_1(t; f)t^{-1}$ 在 $[0, \pi]$ 上可以积分时，$\mathfrak{S}[f]$ 概收斂.

【証明】 設 $t>0$，则

$$\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^{\pi}\frac{|f(\theta\pm t)-f(\theta)|}{t}dt=\int_0^{\pi}\frac{dt}{t}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta\pm t)-f(\theta)|\,d\theta$$
$$\leq\int_0^{\pi}\frac{\omega_1(t)}{t}dt<\infty.$$

从而 f 几乎处处满足狄尼的收斂条件，$\mathfrak{S}[f]$ 概收斂．証毕.

由是可知：当

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta+t)-f(\theta)|\,dt=O(l(t)),$$

$$l(t)\uparrow,\quad l(o)=0,\quad \int_0^1\frac{l(t)}{t}dt<\infty$$

时，$\mathfrak{S}[f]$ 概收斂.

定理 4 設 $1\leqslant p\leqslant 2$, $f\in L^p(0, 2\pi)$, 則当

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(\theta+t)-f(\theta-t)|^p}{t}\,dt\,d\theta$$

收斂时, $\mathfrak{S}[f]$ 概收斂.

【証明】 当 $p=1$ 时,定理 4 就是定理 3; 当 $p=2$ 时,我們已在定理 2 的証明中詳述. 因此問題是在 $1<p<2$ 的情况.

由于 $f(x)=\max\,[f(x), 0]+\min\,(f(x), 0)$, 所以我們不妨假設 $f(x)\geqslant 0$, 設

$$\varphi(x)=\min\{n+1, f(x)\},\qquad \psi(x)=f(x)-\varphi(x),$$

記 $f(\theta)\leqslant n$ 的 $[-\pi, \pi]$ 中一切 θ 为 A_n, $f(\theta)>n+1$ 的一切 θ 为 B_n. 固定 θ, 記适合

$$\theta+t\in B_n,\quad -\pi\leqslant t\leqslant\pi$$

的一切 t 为 C_θ. 容易知道: 积分

$$J_p(\theta)=\int_{-2\pi}^{2\pi}\frac{|f(\theta+t)-f(\theta)|^p}{|t|}\,dt$$

是几乎处处有限的. 事实上,

$$\begin{aligned}
&2\int_0^{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f(u+2t)-f(u)|^p}{|2t|}\,dt\right\}du\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|t|}\left\{\int_{-t}^{2\pi-t}|f(u+2t)-f(u)|^p\,du\right\}dt\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|t|}\int_0^{2\pi}|f(\theta+t)-f(\theta-t)|^p\,d\theta\,dt\\
&\leqslant 2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(\theta+t)-f(\theta-t)|^p}{t}\,dt\,d\theta,
\end{aligned}$$

由是可知 $J_p(\theta)$ 在 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 中是几乎处处有限的.

固定 n, 我們建立两个不等式

(i) $$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\psi(\theta+t)-\psi(\theta)|}{|t|}\,dt=\int_{C_\theta}\frac{|\psi(\theta+t)-\psi(\theta)|}{|t|}\,dt<\infty\quad(\theta\in A_n),$$

(ii) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta)|^2}{t}\,dt\,d\theta<\infty.$$

当 $\theta\in A_n$, $t\in C_\theta$ 时, $|f(\theta+t)-f(\theta)|>(n+1)-n=1$; 从而 $J_p(\theta)$ 的存在含有

$$\int_{C_\theta}\frac{|f(\theta+t)-f(\theta)|}{|t|}dt<\infty.$$

此时 $\psi(\theta)=0$, $\psi(t+\theta)=f(t+\theta)-(n+1)$; 从而

$$|\psi(t+\theta)-\psi(\theta)|\leqslant|f(t+\theta)-f(\theta)|,$$

$$\int_{C_\theta}\frac{|\psi(t+\theta)-\psi(\theta)|}{|t|}dt<\infty\quad(\theta\in A_n).$$

但是此时 $\psi(t+\theta)=0$, $\psi(\theta)=0$, 因此,上面的积分等于

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\psi(t+\theta)-\psi(\theta)|}{|t|}dt<\infty\quad(\theta\in A_n).$$

这就是 (i). 由于 $|\varphi(\theta-t)-\varphi(\theta)|\leqslant|f(\theta+t)-f(\theta)|$ 常成立, 所以

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta-t)|^p}{t}dt\,d\theta<\infty.$$

又因 $\varphi(t)$ 是有界,所以上式当 $p=2$ 时也成立. 从而 (ii) 成立.

$\mathfrak{S}[\psi]$ 在 A_n 上满足狄尼条件 (i), $\mathfrak{S}(\varphi)$ 在 A_n 满足 (ii), (ii) 相当于瀫賴斯耐的条件; 因此 $\mathfrak{S}[f]$ 在 A_n 上概收斂. 但是 $|A_n|\to2\pi$, 所以 $\mathfrak{S}[f]$ 几乎处处收斂. 証明完毕.

定理 4 是馬辛基維斯 (1939) 所发見的. 我們已經明白: 瀫賴斯耐的条件等价于"$p=2$"的情况. 另一方面,斯捷切金(С. Б. Стечкин) 于 1953 年在苏联科学院通报,数学之輯第 17 卷上有如下的补充:

定理 5 設 $S_n(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum\limits_{n=1}^{n}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$ 表示 $\mathfrak{S}[f]$ 的部分和,那末級数 $\sum(a_n^2+b_n^2)\log n$ 的收斂,等价于下列諸条件之一:

(i) $[f(\theta+t)-f(\theta-t)]^2t^{-1}$ 在 $[0,2\pi;0,2\pi]$ 上可以积分,

(ii) $\sum n^{-1}\{R_n^{(2)}\}^2<\infty$,

(iii) $\sum n^{-1}\left\{\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^2<\infty$,

(iv) $\sum n^{-1}\left\{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^2<\infty$.

这里

$$R_n^{(2)}=\|f-S_{n-1}\|_{L^2}=\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\{f(\theta)-S_{n-1}(\theta)\}^2d\theta\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_2^{(2)}(\delta)=\sup_{0<h\leqslant\delta}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}[f(\theta+2h)+f(\theta-2h)-2f(\theta)]^2d\theta\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega^{(2)}(\delta)=\sup_{0<h\leqslant\delta}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\{f(\theta+h)-f(\theta-h)\}^2d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

【証明】 写着 $\rho_\nu^2=a_\nu^2+b_\nu^2$, $\sum\rho_\nu^2\log\nu$ 的收斂等价于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n^2\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}$$

的收斂. 后者可以改写成

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{n=\nu}^{\infty}\rho_n^2=\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}[R_n^{(2)}]^2.$$

从而 (ii) 成立, 同时知道 (ii) 含有 $\sum\rho_\nu^2\log\nu<\infty$.

由于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(\theta+h)-f(\theta-h)\}^2d\theta$$

$$=4\sum_{\nu=1}^{\infty}\rho_\nu^2\sin^2\nu h\leqslant4\left(h^2\sum_{\nu=1}^{n}\nu^2\rho_\nu^2+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\rho_\nu^2\right),$$

所以

$$\frac{1}{\pi}\left[\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2\leqslant\frac{4}{n^2}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^2\rho_\nu^2+n^2\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\rho_\nu^2\right\}$$

$$=\frac{4}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}(2\nu-1)\sum_{k=\nu}^{n}\rho_k^2+4\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\rho_\nu^2\leqslant\frac{8}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\nu\sum_{k=\nu}^{\infty}\rho_k^2.$$

最后的級数 $\sum_{\nu}^{\infty}\rho_k^2$ 等于 $\frac{1}{\pi}[R_\nu^{(2)}]^2$, 从而

$$\left[\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2\leqslant\frac{8}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\nu[R_\nu^{(2)}]^2.$$

由是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2\leqslant8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{\nu=1}^{n}\nu[R_\nu^{(2)}]^2$$

$$=8\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu[R_\nu^{(2)}]^2\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{1}{n^3}\leqslant16\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}[R_\nu^{(2)}]^2.$$

又因 $\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant2\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}\right)$, 所以 (ii) 含有 (iii) 和 (iv).

另一方面，写着

$$E_n^{(2)}=\min_{\alpha_\nu,\beta_\nu}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(\theta)-\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha_\nu\cos\nu\theta+\beta_\nu\sin\nu\theta)\right]^2d\theta\right\}^{\frac{1}{2}},$$

我們知道——最小平方的原理——

$$E_n^{(2)}=\left[\int_{-\pi}^{\pi}[f(\theta)-S_n(\theta)]^2d\theta\right]^{\frac{1}{2}}=R_{n+1}^{(2)},$$

并且存在絕对常數 C 适合*) $E_n^2\leqslant C\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}\right)$. 由是可知 (ii) 等价于 (iii)，也等价于 (iv). 証明完毕.

系 1 設 $[a, b]\subset[0, 2\pi]$，$f\in L(0, 2\pi)$，置

$$\omega_2^{(2)}(\delta, (a, b))=\sup_{0<h\leqslant\delta}\left\{\int_a^b|f(\theta+h)+f(\theta-h)-2f(\theta)|^2d\theta\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega^{(2)}(\delta, (a, b))=\sup_{0<h\leqslant\delta}\left\{\int_a^b|f(\theta+h)-f(\theta-h)|^2d\theta\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$R_{n+1}^{(2)}(a, b)=\left\{\int_a^b|f(\theta)-S_n(\theta)|^2d\theta\right\}^{\frac{1}{2}},$$

則当級数

$$\sum n^{-1}[R_n^2(a,b)]^2,\ \sum n^{-1}\left[\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n},(a,b)\right)\right]^2,\ \sum n^{-1}\left[\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n},(a,b)\right)\right]^2$$

有一个收斂时，$\mathfrak{S}[f]$ 在 $(a+\delta, b-\delta)$ 上概收斂.

記着 $\{E_n^{(2)}(a, b)\}^2=\min\limits_{\alpha_\nu,\beta_\nu}\int_a^b\left|f(\theta)-\sum\limits_{\nu=0}^{n}(\alpha_\nu\cos\nu\theta+\beta_\nu\sin\nu\theta)\right|^2d\theta$,

巴利 (Н. К. Бари) 于 1956 年証明了如下的定理:

系 2 当級数 $\sum n^{-1}[E_n^{(2)}(a, b)]^2$ 收斂时，$\mathfrak{S}[f]$ $[f\in L(0, 2\pi)]$ 在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上概收斂.

1953 年，烏里耶諾夫(П. Л. Ульянов)把馬辛基維斯定理(定理 4)拓广成如下的形式(苏联科学院通报，数学之輯，17):

---

*) 从 $\sigma_n(\theta)-f(\theta)=\dfrac{2}{\pi(n+1)}\displaystyle\int_0^{\pi}\{f(\theta+t)+f(\theta-t)-2f(\theta)\}\left[\dfrac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2dt$

就能得到 $E_n^{(2)}\leqslant C\omega_2^2\left(\frac{1}{n}\right)$.

定理 6 設 $f\in L(0, 2\pi)$，ε 是任一足够小的正数，則当

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\int_0^{\frac{1}{2}\varepsilon}\frac{|f(\theta+t)-f(\theta-t)|^2}{t}\,dt\,d\theta<\infty$$

时，$\mathfrak{S}[f]$ 在 (a, b) 上概收斂．

【証明】 烏里耶諾夫指出：积分中的指数 2 可以写做 $p(1\leqslant p\leqslant 2)$，这里为簡便計，只就 $p=2$ 而言．

固定 $\varepsilon>0$，設 $0<\delta\leqslant\varepsilon$；置

$$\varphi(\theta)=\begin{cases}1 & (a+\varepsilon+\delta\leqslant\theta\leqslant b-\varepsilon-\delta),\\ 0 & \left(0\leqslant\theta\leqslant a+\varepsilon+\dfrac{1}{2}\delta,\ b-\varepsilon-\dfrac{\delta}{2}\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right),\end{cases}$$

$$\varphi(2\pi+\theta)=\varphi(\theta),$$

$\varphi(\theta)$ 在 $\left[a+\varepsilon+\dfrac{1}{2}\delta,\ a+\varepsilon+\delta\right]$ 和 $\left[b-\varepsilon-\delta,\ b-\varepsilon-\dfrac{1}{2}\delta\right]$ 中是一次函数．置 $\dfrac{2}{\delta}=K$，則 $|\varphi(\theta_2)-\varphi(\theta_1)|\leqslant K|\theta_2-\theta_1|$ 成立．易知

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(\theta+t)\varphi(\theta+t)-f(\theta-t)\varphi(\theta-t)|^2}{t}\,dt\,d\theta<\infty.$$

由薇賴斯耐的概收斂条件，$\mathfrak{S}[f\varphi]$ 概收斂，从而 $\mathfrak{S}[f]$ 在 $(a+2\varepsilon, b-2\varepsilon)$ 中概收斂．由于 ε 是任意小的，所以 $\mathfrak{S}[f]$ 在区間 (a, b) 上概收斂．定理証毕．

6．从 $\sum(a_n^2+b_n^2)\omega(n)<\infty$ 决定概收斂的部分和叙列

1940 年，沙勒姆提出如下的問題：当 $\omega(n)\uparrow\infty$，$\omega(n)=o(\log n)$ 时，能否从 $\sum(a_n^2+b_n^2)\omega(n)<\infty$ 找出概收斂的 $\{S_{n_k}(\theta)\}$？$\mathfrak{S}[f]\sim\sum A_n(\theta)$，$A_n(\theta)=a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta$ $(n>0)$；$S_n(\theta)=S_n(f;\theta)$ 是 $\mathfrak{S}[f]$ 的部分和．假如有如上的 $\{S_{n_k}\}$ 存在，那末我們称 $\{n_k\}$ 是从属于 $\omega(n)$ 的一个叙列．

定理 1 对于 $\omega(n)\uparrow\infty$，$\sum(a_n^2+b_n^2)\omega(n)<\infty$，存在从属于 $\omega(n)$ 的叙列．

要証明这个定理，首先建立黎斯的不等式．

引理 1 假如 $f\in L^p(0, 2\pi)$, $p>1$, 那末 f 的共軛函数 $\bar{f}$ 也屬于 L^p, 并且成立着不等式

$$\int_0^{2\pi} |\bar{f}|^p d\theta \leqslant A_p^p \int_0^{2\pi} |f|^p d\theta,$$

A_p 只和 p 有关系,并且可取 $A_{\frac{p}{p-1}}=A_p$.

这是 M. 黎斯的定理(1927 年).

【証明】 当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $1<p\leqslant 2$ 时, 存在正的常数 A_p 和 B_p 适合于

$$|\sin\varphi|^p\leqslant A_p|\cos\varphi|^p-B_p\cos p\varphi.$$

两端都是 φ 的偶函数, 我們不妨假設 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$. 由于 $\cos\frac{p\pi}{2}<0$, 所以在 $\left[\frac{\pi}{2}-\delta, \frac{\pi}{2}\right]$ (δ 很小) 上, 取适当的 B_p, 可使 $-B_p\cos p\varphi>1$; $p>1$ 的話. 当 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta$ 时, $|\cos\varphi|^p\geqslant(\sin\delta)^p$, 取足够大的 A_p, 使 $A_p(\sin\delta)^p>1+B_p$. 因此,所設的不等式成立.

記 f 和 $\bar{f}$ 的普阿松积分为 $u(z)$ 和 $v(z)$ $(z=re^{i\theta})$. 写着 $F(z)=Re^{i\varphi}=u(z)+iv(z)$. 假如 $u(z)>0$, 那末

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{[F(z)]^p}{z}dz=[F(0)]^p.$$

这里 $0<r<1$. 取上式两边的实部:

$$[u(0)]^p=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R^p\cos p\varphi\, d\theta>0.$$

从上面所得的不等式,我們見到——$u(z)>0$ 含有 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$——

$$\int_0^{2\pi}|v|^p d\theta\leqslant A_p\int_0^{2\pi}|u|^p d\theta-B_p\int_0^{2\pi}R^p\cos p\varphi\, d\theta\leqslant A_p\int_0^{2\pi}|u|^p d\theta.$$

現在除去 $u(z)>0$ 的限制. 暫且固定 r: $0<r<1$, 置

$$\varphi_1(\theta)=\max[u(z), 0],\quad \varphi_2(z)=\min[u(z), 0].$$

設 $\varphi_1(\theta)$, $\varphi_2(\theta)$ 的普阿松积分是 $u_1(S)$, $u_2(S)$ $(S=\rho e^{i\theta})$; $u_1(S)$, $u_2(S)$ 的共軛函数是 $v_1(S)$, $v_2(S)$ $(v_1(0)=0,\ v_2(0)=0)$, 那末

$$\int_0^{2\pi} |v_j|^p d\theta \leqslant A_p \int_0^{2\pi} |u_j|^p d\theta \quad (j=1, 2).$$

由是得到

$$\int_0^{2\pi} |v_1+v_2|^p d\theta \leqslant 2A_p \int_0^{2\pi} (|u_1|^p + |u_2|^p)\, d\theta.$$

令 $\rho\to 1$，就得到

$$\int_0^{2\pi} |\bar{f}|^p d\theta \leqslant 2A_p \int_0^{2\pi} |f|^p d\theta.$$

其次，我們要除去 $p\leqslant 2$ 的限制，就是要証上式当 $p>2$ 时成立．設 $t(\theta)$ 适合

$$\int_0^{2\pi} |t(\theta)|^p d\theta \leqslant 1,$$

那末从

$$\int_0^{2\pi} vt\, d\theta = -\int_0^{2\pi} u\bar{t}\, d\theta$$

得到

$$\left|\int_0^{2\pi} vt\, d\theta\right| \leqslant \left[\int_0^{2\pi} |u|^q d\theta\right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\int_0^{2\pi} |\bar{t}|^p d\theta\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant A_p \|u\|_q,$$

这里 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$\left(\int |u|^q d\theta\right)^{\frac{1}{q}} = \|u\|_q$．不等式

$$\left|\int_0^{2\pi} vt\, d\theta\right| \leqslant \|v\|_q$$

当 $\|t\|_p\leqslant 1$ 时成立．現在設

$$t(\theta) = \operatorname{sgn}\,[v(\theta)]^q\,[v(\theta)/\|v\|_q]^{q-1},$$

则 $\|t\|_p=1$，$\left|\int_0^{2\pi} vt\, d\theta\right| = \|v\|_q$．因此，

$$\sup_{\|t\|_p\leqslant 1} \left|\int_0^{2\pi} vt\, d\theta\right| = \|v\|_q.$$

結合起来，我們得到 $\|v\|_q \leqslant A_p \|u\|_q$．从而 $A_q = A_p$，

$$\|v\|_p \leqslant A_p \|u\|_p \quad (p>1).$$

令 $r\to 1$，可以得到引理中的不等式．事实上，

$$|u(z)|^p\leqslant\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|P(r,\,t-\theta)\,dt\right\}^p$$
$$=\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,[P(r,\,t-\theta)]^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\,dt\right\}^p$$
$$\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^pP(r,\,t-\theta)dt\cdot\left[\int_{-\pi}^{\pi}P(r,\,t-\theta)\,dt\right]^{\frac{p}{q}}.$$

最后的因子等于1. 因此得

$$\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{i\theta})|^p\,d\theta\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p\,dt.$$

对于 $\bar{f}$, 我們利用法都 (Fatou) 的不等式:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\bar{f}|^pd\theta\leqslant\limsup_{r\to1}\int_{-\pi}^{\pi}|v(re^{i\theta})|^p\,d\theta$$
$$\leqslant A_p\limsup_{r\to1}\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{i\theta})|^p\,d\theta$$
$$\leqslant A_p\int_{-\pi}^{\pi}|f|^pd\theta.$$

引理証毕.

引理 2 当 $p\geqslant2$ 时, 引理 1 中的 $A_p\leqslant2p$.

【証明】 利用三个等式

(i) $\Delta|F|^p=p^2|F|^{p-2}|F'|^2\quad(F\neq0)$,

(ii) $\Delta u^p=p(p-1)u^{p-2}|F'|^2\quad(u\neq0)$,

(iii) $\displaystyle\int_{C_r}\frac{\partial w}{\partial r}dS=\iint_{S_r}\Delta w\,d\sigma_S\quad[S=\xi+i\eta,\ w=w(\xi,\eta)]$ (格林公式)来証明引理. 置

$$I(r)=\int_0^{2\pi}u^p(r,\,\theta)d\theta,\quad J(r)=\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta})|^pd\theta,$$

则从 (iii) 得到

$$rI'(r)=p(p-1)\iint_{S_r}u^{p-2}|F'|^2d\sigma_S,$$

$$rJ'(r)=p^2\iint_{S_r}|F|^{p-2}|F'|^2d\sigma_S.$$

从而, 当 $1<p\leqslant2$ 时, 成立着不等式

$$J'(r) \leqslant \frac{p}{p-1} I'(r).$$

注意到 $v(0)=0$, $I(0)=J(0)\geqslant 0$, 从上式得到

$$J(r) \leqslant \frac{p}{p-1} I(r),$$

从而

$$\left[\int_0^{2\pi} |v|^p d\theta\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\frac{p}{p-1}\right]^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{2\pi} u^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \quad (u>0,\ p\leqslant 2).$$

假如 $u(z)$ 不常是正的,那末从上式得到

$$\left[\int_0^{2\pi} |v|^p d\theta\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant 2\left[\frac{p}{p-1}\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^{2\pi} |u|^p d\theta\right]^{\frac{1}{p}}.$$

由于 $[p/(p-1)]^{\frac{1}{p}} \leqslant p$, 所以 $A_p \leqslant 2p$. 从引理 1 的証明, 知引理 2 成立.

引理 3 設 $S_n(\theta)$ 是 $\mathfrak{S}[f]$ 的部分和,当 $f\in L^p$ 时,成立着

$$\int_0^{2\pi} |S_n(\theta)|^p d\theta \leqslant (4A_p)^p \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p d\theta.$$

【証明】 置 $S_n^*(\theta)=\frac{1}{2}\{S_n(\theta)+S_{n-1}(\theta)\}$, 則

$$S_n^*(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+t)\ \frac{\sin nt}{2\tan\frac{1}{2}t}\, dt.$$

由于 $\sin nt=\sin n(t+\theta)\cos n\theta-\cos n(t+\theta)\sin n\theta$, 我們写着

$$h_n(\theta)=f(\theta)\cos n\theta,\quad g_n(\theta)=f(\theta)\sin n\theta,$$

从而几乎处处成立着等式

$$S_n^*(\theta)=\tilde{g}_n(\theta)\sin n\theta-\tilde{h}_n(\theta)\cos n\theta.$$

应用敏高夫斯基 (Minkowski) 不等式和引理 1, 我們見到

$$\begin{aligned}\|S_n^*\|_p &\leqslant \|\tilde{g}_n\|_p+\|\tilde{h}_n\|_p \leqslant A_p(\|g_n\|_p+\|h_n\|_p)\\ &\leqslant 2A_p\|f\|_p.\end{aligned}$$

从而 $\|S_n\|_p\leqslant 4A_p\|f\|_p$. 引理証毕.

定理 2 在定理 1 中的假設下,对于某一常数 A, 級数

$$\sum_1^\infty A^{-\omega(n_k)} \quad (A>1)$$

收斂时，$\{n_k\}$ 是从属于 $\omega(n)$ 的一个叙列.

【証明】 写着 $A_n(\theta)=a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta$. 設整数 $n(\theta)$ 和 θ 有关系，

$$S_{n(\theta)}(f)=S_{n(\theta)}=\sum_{p=1}^{n(\theta)}A_p(\theta)=\sum_{p=1}^{n}\psi_p(\theta)\,A_p(\theta),$$

这里 $\psi_p(\theta)=1\ (p\leqslant n(\theta))$，$\psi_p(\theta)=0\ (p>n(\theta))$. 置

$$I=\int_0^{2\pi}S_{n(\theta)}(f)\,d\theta,$$

$$F(\theta)\sim\sum A_n(\theta)\sqrt{\omega(n)}.$$

設 $n(\theta)\leqslant n$，$\psi_{n+1}=0$，則由加減变换，

$$I=\int_0^{2\pi}\sum_{p=1}^{n}S_p(F)\,\Delta\left(\frac{\psi_p}{\sqrt{\omega(p)}}\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sum_{p=1}^{n}\frac{S_p(F)\,\Delta\psi_p d\theta}{\sqrt{\omega(p)}}+\sum_{p=1}^{n}\int_0^{2\pi}\psi_{p+1}S_p(F)\,\Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\omega(p)}}\right)d\theta,$$

記第一項为 J，而第二項的平方不大于

$$\left\{\sum_{p=1}^{n}\Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\omega(p)}}\right)\cdot\left(2\pi\int_0^{2\pi}F^2\,d\theta\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2\leqslant\frac{2\pi}{\omega(1)}\int_0^{2\pi}F^2\,d\theta.$$

要估計 J，首先注意到

$$\int_0^{2\pi}\Delta\psi_pS_p(F)\,d\theta=\int_0^{2\pi}F(\theta)S_p(\Delta\psi_p)\,d\theta,\quad(\Delta\psi_p)^2=\Delta\psi_p;$$

我們得到

$$J^2\leqslant\int_0^{2\pi}F^2\,d\theta\int_0^{2\pi}\left\{\frac{S_1(\Delta\psi_1)}{\sqrt{\omega(1)}}+\cdots+\frac{S_n(\Delta\psi_n)}{\sqrt{\omega(n)}}\right\}^2d\theta$$

$$\leqslant2\int_0^{2\pi}F^2\,d\theta\int_0^{2\pi}\sum_{p<q}\frac{S_p(\Delta\psi_p)S_q(\Delta\psi_q)}{\sqrt{\omega(p)\omega(q)}}\,d\theta$$

$$+\frac{2\pi}{\omega(1)}\int_0^{2\pi}F^2\,d\theta,$$

事实上，詳細地說，由于

$$\sum_{p=1}^{n}\int_0^{2\pi}\frac{[S_p(\Delta\psi_p)]^2}{\omega(p)}d\theta\leqslant\sum_{p=1}^{n}\int_0^{2\pi}\frac{(\Delta\psi_p)^2}{\omega(p)}d\theta$$

$$\leqslant\frac{1}{\omega(1)}\int_0^{2\pi}\sum_1^n\Delta\psi_p\,d\theta=\frac{2\pi}{\omega(1)},$$

所以得到末項．又因

$$\int_0^{2\pi}S_p(\Delta\psi_p)\,\Delta\psi_q\,d\theta=\int_0^{2\pi}S_p(\Delta\psi_p)\,S_q(\Delta\psi_q)\,d\theta,$$

所以写着

$$\chi_p(\theta)=\sqrt{\omega(p)}\left\{\frac{\Delta\psi_{p+1}}{\sqrt{\omega(p+1)}}+\cdots+\frac{\Delta\psi_n}{\sqrt{\omega(n)}}\right\},$$

J^2 中的积分 $\int\Sigma\cdots d\theta$ 等于

$$\sum_{q=p+1}^{n}\int_0^{2\pi}\frac{S_p(\Delta\psi_p)\,\Delta\psi_q}{\sqrt{\omega(p)\,\omega(q)}}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{S_p(\Delta\psi_p)}{\omega(p)}\chi_p(\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{S_p(\chi_p)\,\Delta\psi_p}{\omega(p)}d\theta.$$

当 $k_p>0$, $k_p'>0$, $\frac{1}{k_p}+\frac{1}{k_p'}=1$ 时，从楊格不等式（§1）得到

$$\frac{|S_p(\chi_p)|}{\omega(p)}\Delta\psi_p\leqslant\frac{1}{k_p}\left\{\frac{|S_p(\chi_p)|}{\omega(p)}\right\}^{k_p}+\frac{1}{k_p'}(\Delta\psi_p)^{k_p'}.$$

由是 J^2 中的积分 $\int\Sigma\cdots d\theta$ 等于 $\int S_p(\chi_p)\,\Delta\psi_p d\theta/\omega(p)$，相加得到

$$\left|\sum_{p=1}^{n}\int_0^{2\pi}\Delta\psi_p\frac{S_p(\chi_p)}{\omega(p)}d\theta\right|\leqslant\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{k_p}\int_0^{2\pi}\frac{|S_p(\chi_p)|^{k_p}}{\omega(p)^{k_p}}d\theta+\int_0^{2\pi}\psi_1(\theta)\,d\theta$$

$$\leqslant\sum_{p=1}^{n}\frac{(4A_{k_p})^{k_p}}{k_p}\frac{1}{\omega(p)^{k_p}}\int_0^{2\pi}\chi_p^{k_p}d\theta+2\pi,$$

这里应用了引理 3．由于 $\chi_p\leqslant1$，所以得到

$$J^2\leqslant\int_0^{2\pi}F^2\,d\theta\left\{\frac{2\pi}{\omega(1)}+4\pi+\sum_{p=1}^{n}\frac{(4A_{k_p})^{k_p}}{k_p}\frac{2\pi}{\omega(p)^{k_p}}\right\}.$$

从而——$\omega(1)\geqslant1$ 的話，

$$|I|<\left\{2\pi\int_0^{2\pi}F^2\,d\theta\cdot\left[4+\sum_{p=1}^{n}\frac{(4A_{k_p})^{k_p}}{k_p}\cdot\frac{1}{\omega(p)^{k_p}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

由引理 2, $A_{k_p}\leqslant 2k_p$, 因此,

$$|I|\leqslant\left\{2\pi\int_0^{2\pi}F^2\,d\theta\cdot\left[4+\sum_1^n\frac{(8k_p)^{k_p}}{k_p(\omega(p))^{k_p}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

取适当的 k_p, 使 $[8k_p/\omega(p)]^{k_p}k_p^{-1}$ 尽量地小. 比方說: 置

$$k_p=\frac{\omega(p)}{8e},$$

那末

$$|I|\leqslant\left\{2\pi\int_0^{2\pi}F^2\,d\theta\left[4+\sum_1^n\frac{8e}{\omega(p)}e^{-\frac{\omega(p)}{8e}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

但是对于一定的 θ, 在 $\{\varDelta\psi_p\}$ $(p=1, 2, \cdots, n)$ 中, 只有 $\varDelta\psi_{n(\theta)}=1$, 其余的 $\varDelta\psi_p$ 都是 0. 假如对于 $n_k\uparrow\infty$, 級数

$$\sum_1^\infty\frac{1}{\omega(n_k)}e^{-\frac{\omega(n_k)}{8e}}$$

收斂,那末有常数 C 适合

$$\left|\int_0^{2\pi}S_{n_k(\theta)}(\theta)\,d\theta\right|^2\leqslant C\int_0^{2\pi}F^2d\theta\quad(k=1, 2, \cdots).$$

但是,級数 $\sum(a_n^2+b_n^2)\omega(n)$ 中的 $\omega(n)$ 可乘一常数,不变其收斂性. 因此級数

$$\sum\frac{1}{\omega(n_k)}A^{-\omega(n_k)}\quad(A\text{: 常数})$$

的收斂含有积分

$$\int_0^{2\pi}S_{n_k(\theta)}(\theta)\,d\theta$$

的有界. 由于 A 可以变动,所以得到如下的結果:

$$\sum_1^\infty A^{-\omega(n_k)}<\infty\quad\text{含有}\quad\left|\int_0^{2\pi}S_{n_k(\theta)}(\theta)\,d\theta\right|^2\leqslant C\int_0^{2\pi}F^2\,d\theta.$$

从最后的不等式, 我們可以导出 $\{S_{n_k}(\theta)\}$ 的概收斂(参見瀲賴斯耐定理的証明). 因此, $\{n_k\}$ 是从属于 $\omega(n)$ 的一个数列. 定理証明完毕.

例如: $\omega(n)=\log n$ 的話, $\sum e^{-2\omega(n)}=\sum n^{-2}<\infty$; 由是获得瀲賴斯耐定理.

我們要問:有 $\{n_k\}$ 从属于 $\omega(n)\equiv 1$ 的么? 換句話說,当 $f\in L^2$ 时,

存在 $\{S_{n_k}(\theta)\}$ 概收斂于 $f(\theta)$？下面的定理，肯定地回答了这个問題．

定理 3 假如 $n^2/\omega(n)$ 是 n 的增加函数，那末当級数

$$\sum(a_n^2+b_n^2)\omega(n)$$

收斂时，必有 $\{n_k\}$ 从属于 $\omega(n)$；事实上，适合 $\sum_{k=m}^{\infty} n_k^{-2}=O\left(\frac{\omega(n_m)}{n_m^2}\right)$ 的 $\{n_k\}$ 就能从属于 $\omega(n)$．

【証明】 置 $\rho_n^2=a_n^2+b_n^2$．由于

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[S_n(\theta)-\sigma_n(\theta)]^2d\theta=\frac{\rho_1^2+2^2\rho_2^2+\cdots+n^2\rho_n^2}{(n+1)^2},$$

——S_n, σ_n 分別是 $\mathfrak{S}[f]$ 的部分和以及費耶和——所以当

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\rho_1^2+2^2\rho_2^2+\cdots+n_k^2\rho_{n_k}^2}{(n_k+1)^2}=0$$

时，$S_{n_k}(\theta)-\sigma_{n_k}(\theta)$概收斂于 0．但是 $\sigma_n(\theta)\dot{\to}f(\theta)$，从而 $S_{n_k}(\theta)$概收斂于 $f(\theta)$．現在，設 $n_0=0$，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho_1^2+2^2\rho_2^2+\cdots+n_k^2\rho_{n_k}^2}{n_k^2}&=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k}j^2\rho_j^2\Big)\Big(\frac{1}{n_k^2}+\frac{1}{n_{k+1}^2}+\cdots\Big)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k}j^2\rho_j^2\Big)O\Big(\frac{\omega(n_k)}{n_k^2}\Big).\end{aligned}$$

由于 $\frac{n^2}{\omega(n)}$ 的单調增加性，所以除开 O，上式等于或小于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2\omega(k)<\infty.$$

从而 $\rho_1^2+2^2\rho_2^2+\cdots+n_k^2\rho_{n_k}^2=o(n_k^2)$．証明完毕．

7．零系数特别多的級数

設自然数列 $\{n_k\}$ 滿足

$$n_{k+1}>\lambda n_k\quad(k=1,2,\cdots;\lambda>1);$$

当 $n\neq n_k$ $(k=1,2,\cdots)$时，$a_n=0$，$b_n=0$；我們称

$$\sum(a_{n_k}\cos n_k\theta+b_{n_k}\sin n_k\theta)$$

是一个零系数特别多的三角級数，或称阿达馬 (Hadamard) 式的缺項三角級数．簡写 $\alpha_k=a_{n_k}$，$\beta_k=b_{n_k}$，那末这种級数的形式是

$$\sum(\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta).$$

現在証明柯尔莫哥洛夫的定理:

定理 1 設 $\sum(\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta)$ 是一个零系数特别多的級数,那末当 $\sum(\alpha_k^2+\beta_k^2)<\infty$ 时,这个三角級数概收斂.

【証明】 簡写 $\nu_m=m^2(a_m^2+b_m^2)$,且設 $S_n(\theta)$ 和 $\sigma_n(\theta)$ 分别表示

$$f(\theta)\sim\sum(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

的部分和以及費耶和,这里 $a_{n_k}=\alpha_k$, $b_{n_k}=\beta_k$, $a_n=b_n=0$ $(n\neq n_k)$,从而 $\sum(a_n^2+b_n^2)<\infty$, $f\in L^2$. 因此,

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}\{S_{n_k}-\sigma_{n_k}\}^2d\theta=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(n_k+1)^2}\sum_{m=0}^{n_k}\nu_m\leqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{n_k^2}\sum_{m=0}^{n_k}\nu_m$$
$$=\sum_{m=0}^{n_1}\nu_m\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{n_k^2}+\sum_{m=n_1+1}^{n_2}\nu_m\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{n_k^2}+\cdots+\sum_{m=n_{N-1}+1}^{n_N}\nu_m\cdot\frac{1}{n_N^2}.$$

又因 $n_k^{-2}+n_{k+1}^{-2}+\cdots<\dfrac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\dfrac{1}{n_k^2}$,故上式右边小于

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\left\{n_1^{-2}\sum_{m=0}^{n_1}\nu_m+n_2^{-2}\sum_{m=n_1+1}^{n_2}\nu_m+\cdots+n_N^{-2}\sum_{m=n_{N-1}+1}^{n_N}\nu_m\right\}$$
$$<\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\left\{\sum_{1}^{n_1}(a_m^2+b_m^2)+\sum_{n_1+1}^{n_2}(a_m^2+b_m^2)+\cdots+\sum_{n_{N-1}+1}^{n_N}(a_m^2+b_m^2)\right\}$$
$$=\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\sum_{m=1}^{n_N}(a_m^2+b_m^2).$$

由是可知

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\{S_{n_k}-\sigma_{n_k}\}^2d\theta<\frac{\pi\lambda^2}{\lambda^2-1}\sum(\alpha_k^2+\beta_k^2)<\infty.$$

从而級数 $\sum(S_{n_k}-\sigma_{n_k})^2$ 概收斂,$S_{n_k}(\theta)-\sigma_{n_k}(\theta)$ 概收斂于 0. 但是 $\sigma_{n_k}(\theta)\to f(\theta)$,所以 $S_{n_k}(\theta)\to f(\theta)$. 由于 $S_{n_k}(\theta)$ 是 $\sum(\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta)$ 最初 k 項的和,所以定理証明完毕.

定理 1 还可以加强如下.

定理 2 阿达馬式的缺項富理埃級数 $\mathfrak{S}[f]$ 所表示的函数 f 必属于 $L^p(0,2\pi)$, $p>1$. 因此,$\mathfrak{S}[f]$ 概收斂于 $f(\theta)$.

【証明】 f 之属于 $L^2(0,2\pi)$,是齐革蒙特首先証明的 (Fundamenta Math. 第 16 卷, 1930). 其实,他还建立了更深刻的定理,下面

的定理 3. 我們利用 $f\in L^2$ 的結果来完成定理 2 的証明.

設 $\sum(\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta)$ 是一零系数特别多的級数 $\mathfrak{S}[f]$. 置

$$c_k=\alpha_k-i\beta_k,\quad F(z)=\sum_1^\infty c_k z^{n_k},$$

我們假設 $\sum|c_k|^2=1$. 設 r 是一正整数,置

$$g(z)=[F(z)]^r=\left(\sum_1^\infty c_k z^{n_k}\right)^r=\sum\gamma_\nu z^{m_\nu}.$$

暂且假設 $\lambda\geqslant r+1$——$n_{k+1}\geqslant\lambda n_k$. 那末任一 m_ν 只有但是必有一种表达式

$$m_\nu=an_{k_1}+bn_{k_2}+\cdots,$$

这里 $a, b, \cdots$都是自然数, $a\leqslant r$, $b\leqslant r$. 假如不然,那末存在如下的整数 $\alpha, \beta, \cdots, \alpha\neq 0$,

$$0=\alpha n_{k_1}+\beta n_{k_2}+\cdots.$$

因此,从 $|\alpha n_{k_1}|\leqslant|\beta n_{k_2}|+\cdots$ 得到 $1<r\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}+\cdots\right)=\frac{r}{\lambda-1}$; 这有背于 $\lambda\geqslant r+1$ 的假設. 这里 m_ν 的表达式中的 $a, b, \cdots$满足 $a+b+\cdots=r$. 易知 $\gamma_\nu=\frac{r!}{a!\,b!\cdots}c_{k_1}^a c_{k_2}^b\cdots$. 因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(Re^{i\theta})|^{2r}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(Re^{i\theta})|^2d\theta=\sum|\gamma_\nu|^2R^{2m_\nu}$$

$$\leqslant r!\sum\frac{r!}{a!\,b!\cdots}|c_{k_1}|^{2a}|c_{k_2}|^{2b}\cdots R^{2m_\nu}$$

$$=r!\sum\frac{r!}{a!\,b!\cdots}(|c_{k_1}|R^{k_1})^{2a}(|c_{k_2}|R^{k_2})^{2b}\cdots$$

$$=r!\left(\sum|c_k|^2R^{2n_k}\right)^r\leqslant r!\left(\sum|c_k|^2\right)^r=r!,$$

从而 $f\in L^{2r}$, 但 $r+1\leqslant\lambda$. 假如 $\lambda<r+1$, 那末取足够大的整数 N 使 $\mu=\lambda^N>r+1$. 数列 $\{n_k\}$ 的任一数 n_k 必属于下列 N 个数列中的一个,也只有一个:

$$n_i,\ n_{i+N},\ n_{i+2N},\ \cdots\quad(i=1, 2, \cdots, N).$$

任一数列的相邻两項之比 $\frac{n_i+\nu N}{n_i+(\nu-1)N}\geqslant\lambda^N>r+1$. 相应地 F 可以写成 N 个函数之和: $F=F_1+F_2+\cdots+F_N$, 这里

$$F_i(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{i+kN}z^{n_{i+kN}}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N),$$

因此

$$|F|^{2r}\leqslant(|F_1|+\cdots+|F_N|)^{2r}\leqslant N^{2r}(|F_1|^{2r}+\cdots+|F_N|^{2r}),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(Re^{i\theta})|^{2r}d\theta\leqslant N^{2r}r!,$$

从而 $f\in L^{2r}$ $(r=1,\ 2,\ \cdots)$. 此結果包含着 $f\in L^p$ $(p>1)$. 証明完毕.

定理 3 設 $\sum_1^{\infty}(\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta)$ 是一个零系数特别多的三角級数. 假如这个級数在某一正測度的点集 E 上, 可用算术平均法求和, 那末 $\sum(\alpha_k^2+\beta_k^2)<\infty$.

【証明】 置 $S_{n_k+\nu}(\theta)=\sum_1^k(\alpha_\mu\cos n_\mu\theta+\beta_\mu\sin n_\mu\theta)$ $(\nu=0,\ 1,\ \cdots,\ n_{k+1}-n_k-1)$, 我們要从极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1(\theta)+S_2(\theta)+\cdots+S_n(\theta)}{n}$$

在 E 上的存在导出 $\sum(\alpha_k^2+\beta_k^2)$ 的收斂. 这是下述命题的特殊情况. 設 $\{\beta_{jk}\}$ 具有

$$\lim_{j\to\infty}\beta_{jk}=0\quad (k=1,\ 2,\ \cdots)\quad 和\quad \lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{jk}=1$$

两种性质. 我們要从

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{jk}S_k(\theta)\quad (\theta\in E)$$

的存在, 导出 $\sum(\alpha_k^2+\beta_k^2)<\infty$. 当級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{jk}$ 是有限級数时——$\beta_{jk}=0$ $(k>k_0)$, 函数 $\sigma_j(\theta)=\sum\beta_{jk}S_k(\theta)$ 是連續的. 我們不妨假設 $\{\sigma_j(\theta)\}$ 在 E 上是匀斂的——通过爱戈洛夫定理——从而 $|\sigma_j(\theta)|<C$ (C: 常数, $\theta\in E$).

首先假設 $\alpha_k=0,\ \beta_k=0$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu-1)$. 置

$$A_k(\theta)=\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta=\rho_k\cos(n_k\theta+\varepsilon_k),$$

$$R_k(j)=\beta_{j,k}+\beta_{j,k+1}+\cdots,$$

那末 $\sigma_j(\theta)=\sum_{k=\nu}^{\infty}A_k(\theta)R_{n_k}(j)$, 其中只有有限个項. 平方在 E 上的积

分不大于 $C^2|E|$。另一方面，

$$\int_E |\sigma_j(\theta)|^2 d\theta = \sum_{k=\nu}^{\infty} \rho_k^2 R_{n_k}^2(j) \int_E \cos^2(n_k x + \varepsilon_k)\, dx + \sum_{k=\nu}^{\infty} \sum_{\substack{l=\nu \\ k\neq l}}^{\infty} \rho_k' \rho_l' b_{kl},$$

这里

$$\rho_k' = \rho_k R_{n_k}(j), \quad b_{kl} = \int_E \cos(n_k\theta + \varepsilon_k) \cos(n_l\theta + \varepsilon_l)\, d\theta.$$

簡写

$$I(j) = \sum_{k=\nu}^{\infty} \rho_k'^2 \int_E \cos^2(n_k\theta + \varepsilon_k)\, d\theta + \sum_{\substack{\nu \\ k\neq l}}^{\infty} \sum_{\nu}^{\infty} \rho_k' \rho_l' b_{kl},$$

我們見到 $I(j) \leqslant C^2|E|$. 其次我們要証

$$I(j) \geqslant \frac{1}{8} |E| \sum_{k=\nu}^{\infty} \rho_k'^2.$$

置 $r_m^2 = c_m^2 + s_m^2$, 这里

$$c_m = \frac{1}{\pi} \int_E \cos m\theta\, d\theta, \quad s_m = \frac{1}{\pi} \int_E \sin m\theta\, d\theta.$$

我們見到 $\dfrac{2}{\pi} b_{kl}$ 等于

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_E \{\cos[(n_k + n_l)\theta + \varepsilon_k + \varepsilon_l] + \cos[(n_k - n_l)\theta + \varepsilon_k - \varepsilon_l]\}\, d\theta \\ &= \cos(\varepsilon_k + \varepsilon_l) c_{n_k+n_l} - \sin(\varepsilon_k + \varepsilon_l) s_{n_k+n_l} \\ &\quad + \cos(\varepsilon_k - \varepsilon_l) c_{n_k-n_l} - \sin(\varepsilon_k - \varepsilon_l) s_{n_k-n_l}, \end{aligned}$$

而其平方小于

$$2(c_{n_k+n_l}^2 + s_{n_k+n_l}^2 + c_{n_k-n_l}^2 + s_{n_k-n_l}^2).$$

由是，当 $k > l$ 时，

$$\left(\frac{2}{\pi} b_{kl}\right)^2 \leqslant 2(r_{n_k+n_l}^2 + r_{n_k-n_l}^2).$$

我們要証 $\sum\limits_{k\neq l}\sum b_{kl}^2 < \infty$; 为此首先証明如下的事实. 对于 $\{n_k\}$, 存在如下的 s: 任何自然数 n 能写成

$$n = n_k + n_l \quad \text{或是} \quad n = n_k - n_l$$

的种数决不超过 s. 事实上,当 $k>l$, $n=n_k+n_l$ 时,

$$n_k<n<n_k\left(1+\frac{1}{\lambda}\right).$$

从而 $n\lambda/(1+\lambda)<n_k<n$. 假如 $n=n_k-n_l$, 那末从

$$\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)n_k<n<n_k \text{ 得到 } n<n_k<n\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

由是,适合 $n=n_k\pm n_l$ 的 n_l 必满足

$$\frac{\lambda}{\lambda+1}n<n_k<n\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

設满足这个关系的最小以及最大的 n_k 是 n_q 和 n_{q+s}, 那末从

$$n_{q+s}<n\frac{\lambda}{\lambda-1} \quad \text{和} \quad n_q>n\frac{\lambda}{\lambda+1}$$

得到 $n_{s+q}/n_q<\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}$. 左端大于 λ^s, 从而

$$\lambda^s<\frac{\lambda+1}{\lambda-1}.$$

因此 n_k 只能在 n_q, n_{q+1}, $\cdots$, n_{q+s} 中取得, 并且 s 是有界——无关于 n. 由是可知

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}r_{n_k+n_l}^2 \quad \text{和} \quad \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=l+1}^{\infty}r_{n_k-n_l}^2$$

的和都不大于 $s\sum\limits_{m=1}^{\infty}r_m^2$. 因此, $\sum\limits_{k\neq l}b_{kl}^2<\infty$. 取足够大的 n_0 可使

$$\left\{\sum_{k=n_0}\sum_{\substack{l=n_0\\k\neq l}}b_{kl}^2\right\}^{\frac{1}{2}}<\frac{1}{8}|E|.$$

現在估計 $I(j)$ 中的积分:

$$2\int_E\cos^2(n_k\theta+\varepsilon_k)\,d\theta=\int_E[1+\cos 2(n_k\theta+\varepsilon_k)]\,d\theta$$

$$=|E|+\int_E\cos 2(n_k\theta+\varepsilon_k)\,d\theta.$$

由于末項是 $o(1)$, 所以不妨假設当 $n_k>n_0$ 时, 它的絕对値小于 $\dfrac{1}{2}$. 从而得到

$$I(j) \geqslant \frac{1}{4}|E|\sum_{k=\nu}^{\infty}\rho_k'^2 - \left|\sum_{\substack{k=\nu\\k\neq l}}\sum_{l=\nu}\rho_k'\rho_l' b_{kl}\right|,$$

这里 $|n_k - n_l| \geqslant n_0$, $n_k + n_l \geqslant n_0$. 末項不大于

$$\left\{\sum_{\substack{k=\nu\\k\neq l}}\sum_{l=\nu}\rho_k'^2\rho_l'^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{\substack{k=\nu\\k\neq l}}^{\infty}\sum_{l=\nu}^{\infty}b_{kl}^2\right\}^2 \leqslant \frac{1}{8}|E|\sum_{k=\nu}^{\infty}\rho_k'^2,$$

因此 $I(j) \geqslant \frac{1}{8}|E|\sum_{k=\nu}^{\infty}\rho_k'^2$. 由于 $I(j) \leqslant C^2|E|$, 所以得到

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}\rho_k'^2 \leqslant 8C^2,$$

或是 $\sum_{k=\nu}^{\infty}\rho_k^2 R_{n_k}(j) \leqslant 8C^2$.

由于 $R_{n_k}(j) \to 1$ $(j\to\infty)$, $\beta_{jm}\to 0$ $(j\to\infty)$, 所以从上面的不等式得到

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}\rho_k^2 \leqslant 8C^2.$$

从而 $\sum\rho_k^2 < \infty$. 証明完毕.

系 零系数特别多的三角級数的系数的平方和假如是 ∞, 那末这个級数不是富理埃級数，不但几乎处处发散并且几乎处处不能用满足

$$\lim_{j\to\infty}\beta_{jq} = 0, \quad \lim_{j\to\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\beta_{jq} = 1$$

的求和法求和。

那末,零系数特别多的三角級数不属于 L^2 时,会不会处处发散?

定理 4 零系数特别多的三角級数 $\sum(\alpha_k\cos n_k\theta + \beta_k\sin n_k\theta)$ 的系数 α_k 和 β_k 都是 $o(1)$ 的話,它在任何区間中的收斂点集的势是連續点集的势 $\aleph$, 它所表示的函数沒有第一种不連續点.

首先証明几个引理.

引理 1 假如 $F(\theta)$ 在 (a, b) 中是連續的而且是光滑的,那末 (a, b) 的任一子区間中, $f'(\theta)$ 存在的点集 E 的势是 $\aleph$.

【証明】 写着

$$\frac{F(\theta+h)+F(\theta-h)-2F(\theta)}{h} = \frac{F(\theta+h)-F(\theta)}{h} + \frac{F(\theta-h)-F(\theta)}{h},$$

由于 $F(\theta)$的光滑性，当 $\theta\in(a, b)$时，左端是 $o(1)$. 假如 θ 是 $F(\theta)$的一个极大(小)点，那末当 $h>0$ 时，右方两項都是負数(正数)；当 $h<0$ 时，右方两項都是正数(負数). 由是可知: $F'(\theta)$ 存在而等于 0, 設 $a<\alpha<\beta<b$, 作 $(\alpha, F(\alpha))$ 和 $(\beta, F(\beta))$ 的連綫

$$L(\theta)=m\theta+n.$$

那末 $F(\theta)-L(\theta)$, 当 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 时，等于 0. 从而 (α, β) 中存在如下的一点 θ_0:

$$F'(\theta_0)-L'(\theta_0)=0.$$

或是 $F'(\theta_0)=m$; 事实上，$F(\theta)-L(\theta)$ 在 (a, b) 中是光滑的，在 (α, β) 中存在一个极值点. 不妨假設 m 跟着 (α, β) 的变动而变动的，从而 θ_0 也是如此. 由是可知 $F'(\theta)$ 在 (α, β) 中存在的点集，其势是 $\aleph$.

設 $f(\theta)$在点集 E 上是定义着的，当 α 和 β 都属于 E 时，对于 $f(\alpha)$ 和 $f(\beta)$ 之間的任一数 C, E 中必有点 γ 适合于 $f(\gamma)=C$ 的話，我們說: $f(\theta)$ 在 E 上具有性质 D.

引理 2 設 $F(\theta)$是(a, b)上的一个光滑的連續函数，E 是 (a, b) 中的 $F'(\theta)$ 存在的 θ 的全体，那末 $F'(\theta)$ 在 E 上具有性质 D.

【証明】 設 $\alpha\in E$, $\beta\in E$, $f'(\alpha)<C<F'(\beta)$. 我們不妨假設 $C=0$. 事实上，函数 $F(\theta)-C\theta$ 满足

$$F'(\alpha)-C<0<F'(\beta)-C.$$

这样，$F'(\alpha)<0$, $F'(\beta)>0$. 因此，取正数 h 适当地小，可使 $g(\theta)=[F(\theta+h)-F(\theta)]/h$ 滿足

$$g(\alpha)<0,\quad g(\beta)>0,\quad \frac{F(\beta)-F(\beta-h)}{h}>0.$$

在 (α, β) 中必有如下的 γ: $g(\gamma)=0$, 从而

$$F(\gamma+h)=F(\gamma).$$

在 $(\gamma, \gamma+h)$ 中，存在适合 $F'(\theta_0)-0$ 的 θ_0. 証明完毕.

引理 3 設 $\tau(n)=\sum_{1}^{n}\nu(|a_\nu|+|b_\nu|)$. 假如 $\tau(n)=o(n)$, 那末三角級数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

的积分級数 $F(\theta)=\frac{1}{2}a_0\theta+C+\sum(a_n\sin n\theta-b_n\cos n\theta)/n$ 表示一个均匀光滑的連續函数，在 $F'(\theta)$ 存在的点 θ，三角級数收斂；事实上，当 $h\to0$ 时，均匀地成立着

$$\frac{F(\theta+h)-F(\theta-h)}{h}-\frac{1}{2}a_0-\sum_{k=1}^{[1/h]}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)\to0.$$

【証明】 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|+|b_k|}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau(k)-\tau(k-1)}{k^2}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\tau(k)\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$
$$=O\left(\sum k^{-2}\right)=O(1),$$

所以 $F(\theta)$ 是一連續函数．写着 $A_n=a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta$，

$$S_n(\theta)=\sum_{0}^{n}A_\nu,\quad A_0=\frac{1}{2}a_0,\quad B_n=-a_n\sin n\theta+b_n\cos n\theta,$$

那末，$|\sin u/(u-1)|<C|u|$，$\left[\frac{1}{h}\right]=N$ 的話，

$$\left|\frac{F(\theta+h)-F(\theta-h)}{h}-S_N(\theta)\right|$$
$$\leqslant\left|\sum_{\nu=1}^{N}A_\nu\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}-1\right)\right|+\left|\sum_{\nu=N+1}^{\infty}A_\nu\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right|$$
$$\leqslant C|h|\sum_{\nu=1}^{N}\nu(|a_\nu|+|b_\nu|)+\frac{1}{|h|}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{|a_\nu|+|b_\nu|}{\nu}$$
$$=o(1)+\frac{1}{|h|}\sum_{k=N+1}^{\infty}o\left(\frac{1}{k^2}\right)=o(1).$$

又因

$$\frac{F(\theta+2h)+F(\theta-2h)-2F(\theta)}{4h}=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{\sin^2kh}{kh}$$
$$\leqslant|h|\sum_{k=1}^{N}k|B_k|+\frac{1}{|h|}\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{|a_k|+|b_k|}{k}=o(1),$$

所以 $F(\theta)$ 是光滑的．当 $F'(\theta)$ 存在时，$\lim S_n(\theta)$ 存在．証明完毕

【定理 4 的証明】 写着 $\alpha_k=a_{n_k}$，$\beta_k=b_{n_k}$；当 $n\neq n_k$ 时，$a_n=b_n=$ 設 $n_k\leqslant n<n_{k+1}$，則

$$\tau(n)=\sum_{\nu=1}^{n}\nu(|a_\nu|+|b_\nu|)=\sum_{\nu=1}^{k}n_\nu(|\alpha_\nu|+|\beta_\nu|)$$

$$\leqslant n_k\sum_{\nu=1}^{k}\lambda^{-k+\nu}(|\alpha_\nu|+|\beta_\nu|)$$

$$\leqslant n_k\left\{\sum_{\nu=1}^{k_0}\lambda^{-k+\nu}\max(|\alpha_\nu|+|\beta_\nu|)+\max_{\nu>k_0}(|\alpha_\nu|+|\beta_\nu|)\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda^{-\nu}\right\}$$

$$\leqslant n_k C\{\lambda^{-k+k_0}+\max_{\nu>k_0}(|\alpha_{n\nu}|+|\beta_{n\nu}|)\}<n_k(\varepsilon+\lambda^{-k})\lambda^{k_0}.$$

从而 $\tau(n)=o(n)$. 由引理 3, $\sum(\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta)$ 的积分函数 $F(\theta)$是一个光滑的連續函数,它的可以微分点所成之集 E, 其势是 $\aleph$. 由引理 3, 在 E 上成立着

$$F'(\theta)=\sum(\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta).$$

由于函数在它的第一种不連續点的附近,不可能具有性质 D, 所以所設級数的和决无第一种不連續点. 定理証明完毕.

定理 5 阿达馬式的缺項三角級数 $\sum(\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta)$ 收斂于一个連續函数 $f(\theta)$ 时, 收斂是均匀的并且是絕对的; $f(\theta)\in$ Lip α $(0<\alpha<1)$ 的充要条件是

$$\alpha_k=O(n_k^{-\alpha}),\quad \beta_k=O(n_k^{-\alpha}).$$

【証明】 由于 $f(\theta)$ 是一連續函数,所以 $\mathfrak{S}[f]$ 的費耶和 $\sigma_n(\theta)$ 匀斂于 $f(\theta)$. 另一方面,

$$|S_n(\theta)-f(\theta)|\leqslant|S_n(\theta)-\sigma_n(\theta)|+|\sigma_n(\theta)-f(\theta)|.$$

末項均匀地是 $o(1)$, 第一項等于

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu(a_\nu\cos\nu\theta+b_\nu\sin\nu\theta)\right|\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu(|a_n|+|b_n|).$$

定理 4 的証明,这也均匀地是 $o(1)$. 因此 $S_n(\theta)$ 匀斂于 $f(\theta)$.

系数为 $O(n^{-\alpha})$ 是 $f(\theta)\in$ Lip α 的必然的結果. 其实, 这并不限于零系数特别多的級数. 一般地說: 当

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}dt$$

时, c_n 也等于

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right]e^{-int}\,dt.$$

从而

$$|c_n|\leqslant\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right|dt\leqslant O(n^{-\alpha}).$$

現在要从 $\alpha_k=O(n_k^{-\alpha})$ 和 $\beta_k=O(n_k^{-\alpha})$ 导出 $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha$. 設

$$\frac{1}{n_{N+1}}\leqslant|h|<\frac{1}{n_N},$$

写着 $f(\theta+h)-f(\theta)=P+Q$, 这里

$$P=\sum_{k=1}^{N}\{\alpha_k[\cos n_k(\theta+h)-\cos n_k\theta]+\beta_k[\sin n_k(\theta+h)-\sin n_k\theta]\},$$

$$Q=\sum_{k=N+1}^{\infty}\{\alpha_k[\cos n_k(\theta+h)-\cos n_k\theta]+\beta_k[\sin n_k(\theta+h)-\sin n_k\theta]\}.$$

由于

$$|P|\leqslant\sum_{k=1}^{N}\{2|\alpha_k|\cdot n_k\cdot|h|+2|\beta_k|\cdot n_k\cdot|h|\}=O(|h|)\sum_{k=1}^{N}n_k^{1-\alpha}$$
$$=O(|h|n_N^{1-\alpha})=O(|h|^{\alpha}),$$

$$|Q|\leqslant2\sum_{k=N+1}^{\infty}(|\alpha_k|+|\beta_k|)=O(n_{N+1}^{-\alpha})=O(|h|^{\alpha}),$$

所以 $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha$.

級数的絕对收斂性，还可以从較弱的条件导出，詳述于如下的定理.

定理 6*) 零系数特别多的三角級数 $\sum(\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta)$, 假如它是一个有界函数 $f(\theta)$ 的 $\mathfrak{S}[f]$, 那末 $\sum(|\alpha_k|+|\beta_k|)<\infty$.

【証明】 首先假設 $\beta_k=0$ $(k=1, 2, \cdots)$, 从 $|f(\theta)|\leqslant M$ 导出 $\sum|\alpha_k|<\infty$. 将 $\{n_k\}$ 分成 r 个子叙列

$$n_{kr+i}\quad(i=0, 2, \cdots,\quad r-1;\ k=1, 2, 3, \cdots).$$

我們考慮 r 个余弦級数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_{kr+i}\cos n_{kr+i}\theta$ $(i=0, 2, \cdots, r-1)$. 我們要証明：对于一个自然数 p $(p>1)$, 任一数列 $L_i=n_{kr+i}$ $(k=1, 2, \cdots)$ 中的任何 p 个数 $l_1, \cdots, l_p$:

---

*) S. 西童 (Szidon), (德国) Math. Ann. 97 (1927).

$$l_1>l_2>\cdots>l_p$$

具有形式 $\nu=l_1\pm l_2\pm l_3\pm\cdots\pm l_p$ 的数都不等于 n_k $(k=1, 2, \cdots)$. 設 $\varepsilon<(\lambda-1)/2(\lambda+1)$，則在任一区間$(n_k(1-2\varepsilon), n_k(1+2\varepsilon))$ 中不含有 $\{n_\nu\}_{\nu\neq k}$ 的数；事实上，当 $(1+2\varepsilon)/(1-2\varepsilon)<\lambda$ 时，成立着 $n_k(1+2\varepsilon)<n_{k+1}(1-2\varepsilon)$. 設 r 足够大，能使

$$\mu=\lambda^r>2, \quad \frac{1}{\mu-1}<\varepsilon.$$

設 $l_\nu/l_{\nu+1}\leqslant\frac{1}{\mu}$，則 $\nu=l_1\pm\cdots\pm l_p<l_1\left(1+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^2}+\cdots\right)=\frac{l_1\mu}{\mu-1}$，并且

$$\nu>l_1\left(1-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu^2}-\cdots\right)=l_1\frac{\mu-2}{\mu-1}.$$

由是可知 $\nu\in\left(l_1\frac{\mu-2}{\mu-1}, l_1\frac{\mu}{\mu-1}\right)$，从而 $l_1(1-\varepsilon)<\nu<l_1(1+\varepsilon)$. 由于 l_1 是 $\{n_\nu\}$ 中的一个数 n_q，所以上式含有 $\nu\in(n_q(1-2\varepsilon), n_q(1+2\varepsilon))$，在此区間中，除 n_q 而外，不含其他的 n_k $(k\neq q)$. 因此，

$$|n_k-\nu|\geqslant l_1\varepsilon=C_\lambda l_1.$$

假如 $n_k\in L_j$ $(j\neq i)$，那末 $n_k\neq n_q$，从而 $|n_k-\nu|\geqslant C_\lambda l_1$. 假如

$$n_k=n_q=l_1, \quad l_2\neq 0,$$

那末 $|n_k-\nu|=|\nu-l_1|=|l_2\pm l_3\pm\cdots\pm l_p|\geqslant l_2(1-2\varepsilon)>0$. 从而 $n_k\neq\nu$.

簡写 $a_{kr+i}=a'_k$, $n_{kr+i}=n'_k$. 設 $\varepsilon_k=\pm1$，則

$$T_q(\theta)=\prod_{k=1}^{q}(1+\varepsilon_k\cos n'_k\theta)=1+\sum_{k=1}^{q}\varepsilon_k\cos n'_k\theta+\sum A_\nu\cos\nu\theta,$$

这里 $\nu=l_1\pm l_2\pm\cdots\pm l_p$ $(p>1, l_\nu\in\{n'_k\})$. 由于 $\nu\,\overline{\in}\,\{n_k\}$，所以

$$\sum A_\nu\int_0^{2\pi}\cos\nu\theta\, f(\theta)\,d\theta=0.$$

取 $\varepsilon_k=\operatorname{sgn}a'_k$，則得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}T_q(\theta)\,f(\theta)\,d\theta=\sum_{k=1}^{q}|a'_k|.$$

設 $|f(\theta)|\leqslant M$，則因 $T_q(\theta)\geqslant 0$，我們見到 $\sum_{k=1}^{q}|a'_k|\leqslant\frac{1}{\pi}M\int_0^{2\pi}T_q(\theta)\,d\theta$

$=2M$. 从而得到 $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha'_k|<\infty$.

置 $S_q(\theta)=\prod_{k=1}^{q}(1+\operatorname{sgn}\beta'_k\sin n'_k\theta)$, 則得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}S_q(\theta)f(\theta)\,d\theta=\sum_{k=1}^{q}|\beta'_k|\leqslant 2M,\quad \sum_{k=1}^{\infty}|\beta'_k|<\infty.$$

証明完毕. 事实上, $f(x)+f(-x)$ 和 $f(x)-f(-x)$ 分别是偶的, 奇的有界函数.

定理 5 还可以改进 关于零系数特别多的級数 $\mathfrak{S}[f]$, $f\in\operatorname{Lip}\alpha$ $(0<\alpha<1)$ 等价于 $\alpha_k=O(n_k^{-\alpha})$, $\beta_k=O(n_k^{-\alpha})$; 这是定理 5. 近年来(1954 以后), 这个定理有种种的改进和拓广. 例如 P. B. 肯尼迪証明: 对于零系数特别多的級数, 假如 $f\in\operatorname{Lip}\alpha$ 在 E $(|E|>0)$ 上成立 $(0<\alpha<1)$, 那末我們就能說 $\alpha_k=O(n_k^{-\alpha})$ 和 $\beta_k=O(n_k^{-\alpha})$ (倫敦数学会刊 J. L. M. S. 33, 1958). 1956 年, 在(牛津)数学季刊(Q. J. M. 7)上, 肯尼迪还証明假如 $f(\theta)\sim\sum(\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta)$ 在一区間上 $f\in\operatorname{Lip}\alpha$ $(0<\alpha<1)$, 那末当

$$N_k=\max(n_k-n_{k-1},\ n_{k+1}-n_k)\to\infty$$

时, 我們就能断言 $\alpha_k=O(n_k^{-\alpha})$ 和 $\beta_k=O(n_k^{-\alpha})$. 这是 M. E. 挪勃耳(Noble)定理(德国, Math. Ann. 128, 1954)的改进, 事实上, 挪勃耳在条件 $N_k/\log n_k\to\infty$ 下获得上述結果的.

这里討論如下的問題 *), 假如 $f(\theta)$ 只在一点"具有 $\operatorname{Lip}\alpha$ 的性质", 那末对于 α_k 和 β_k 能說些什么? 下面是 M. 多密起 (Tomić) 的定理 (J. L. M. S. 37, 1962).

定理 7 設 $f(\theta)\sim\sum_{1}^{\infty}(\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta)$ 是一个零系数特别多的富理埃級数; 在一点 θ_0, 假如

$$\omega(\theta_0,\delta)=\sup_{0\leqslant|t|\leqslant\delta}|f(\theta_0+t)-f(\theta_0)|=O(\delta^{\alpha})\quad(0<\alpha\leqslant 1),$$

那末 $|\alpha_k|$ 和 $|\beta_k|$ 都是 $O(n_k^{-\alpha/(\alpha+2)})$.

【証明】 我們不妨假設 $\theta_0=0$. 設 $N=\min(n_k-n_{k-1},\ n_{k+1}-n_k)$,

---

*) 这个問題, 謝庭藩在数学学报第 14 卷上完全解决. 因此改进了定理 7.

$$P_{N-1}(\theta)=2K_{N-1}(\theta)=1+2\sum_{1}^{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)\cos k\theta,$$

则乘积 $S_{n_k}(\theta)P_{N-1}(\theta)$ 中一切項都不会出現 $\cos n_k\theta$ 或 $\sin n_k\theta$. 因此，乘积 $S_{n_k}P_{N-1}\cos n_k\theta$ 或是 $S_{n_k}P_{N-1}\sin n_k\theta$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的积分等于 0. 从而

$$\begin{matrix}\alpha_k\\ \beta_k\end{matrix}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(\theta)-S_{n_k}(\theta)\}P_{N-1}(\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, n_k\theta\, d\theta$$

成立;事实上, $P_{N-1}(\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n_k\theta$ 具有形式

$$\sum_{p=0}^{N-1}{}'\left(1-\frac{p}{N}\right)\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n_k+p)\theta+\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n_k-p)\theta\right\}\ \left(p=0\text{ 时}, 1-\frac{p}{N}\text{ 是 }\frac{1}{2}\right).$$

由是——簡写 $n_k=n$——

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\alpha_k\\ \beta_k\end{vmatrix}&\leqslant\left(\int_{-\delta_n}^{\delta_n}+\int_{-\pi}^{-\delta_n}+\int_{\delta_n}^{\pi}\right)|f-S_n|\ |P_{N-1}(\theta)|\left|\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n_k\theta\right|d\theta\\ &=J_1+J_2+J_3.\end{aligned}$$

設 $\sigma_n(\theta)$ 是 $\mathfrak{S}[f]$ 的費耶平均,那末

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sigma_m(\theta)-f(\theta)|\,d\theta=o(1).$$

置 $n_{k+1}=m$, 則得

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(\theta)-f(\theta)|\,d\theta\\ &\quad=\frac{1}{m-n}\int_{-\pi}^{\pi}|(m+1)(\sigma_m-f)-(n+1)(\sigma_n-f)|\,d\theta=o(1).\end{aligned}$$

由于費耶的核 $\frac{1}{2}P_{N-1}(\theta)$ 适合于

$$\sup_{\delta\leqslant\theta\leqslant\pi}|P_{N-1}(\theta)|=O\left(\frac{1}{N\delta^2}\right),$$

所以得到 $J_2=O\left(\frac{1}{N\delta^2}\right)=O(n_k^{-1}\delta^{-2})$. 同样可得 $J_3=O(n_k^{-1}\delta^{-2})$.

最后估計 J_1, 我們必須研究 $|f(\theta)-S_n(\theta)|$. 設 $D_\nu(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\nu}\cos kt$, 則

$$S_n(\theta)-f(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(\theta,\ t)D_n(t)dt,$$

$$\phi(\theta,\ t)=f(\theta+t)+f(\theta-t)-2f(\theta).$$

由于

$$mK_{m-1}(t)-nK_{n-1}(t)=\sum_{\nu=n}^{m-1}D_\nu(t)$$

$$=(m-n)D_n(t)+\sum_{\nu=1}^{m-n-1}(m-n-\nu)\cos(n+\nu)t,$$

所以 $|f(\theta)-S_n(\theta)|$ 不大于

$$\frac{1}{\pi(m-n)}\int_0^{\pi}|\phi(\theta,\ t)|\cdot|mK_{m-1}(t)-nK_{n-1}(t)|dt$$

$$=\frac{1}{2\pi(m-n)}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{m-n}}+\int_{\frac{\pi}{m-n}}^{\delta_n}+\int_{\delta_n}^{\pi}\right\}|\phi(\theta,\ t)|$$

$$\times\frac{\left|\sin^2 m\frac{1}{2}t-\sin^2 n\frac{1}{2}t\right|}{\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

$$=I_1+I_2+I_3,$$

这里 $\frac{1}{\delta_n n}=o(1)$，$n=n_k$，$m=n_{k+1}$.

由于 $m/n\geqslant\lambda>1$，$\delta_n<\frac{\pi}{4}$，所以 I_1 不大于

$$\frac{2}{2\pi(m-n)}\sup_{\substack{|\theta|<\delta_n\\|t|<\pi/(m-n)}}|\phi(\theta,\ t)|\cdot\int_0^{\pi/(m-n)}\frac{\left|\sin^2 m\frac{1}{2}t-\sin^2 n\frac{1}{2}t\right|}{\sin^2\frac{1}{2}t}dt$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi(m-n)}\omega(0,\ 2\delta_n)(m^2-n^2)\frac{\pi}{2(m-n)}<\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\omega(0,\ 2\delta_n).$$

易知 I_2 不大于

$$\frac{1}{2\pi(m-n)}\sup_{\substack{|\theta|<\delta_n\\\pi/(m-n)<|t|<\delta_n}}|\phi(\theta,\ t)|\cdot\int_{\frac{\pi}{m-n}}^{\delta_n}\frac{dt}{\sin^2\frac{1}{2}t}$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi(m-n)}\omega(0,\ 2\delta_n)\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{m-n}{\pi}<\omega(0,\ 2\delta_n),$$

$$I_3 \leqslant \frac{\pi^2}{2\pi(m-n)\delta_n^2}\int_{\delta_n}^{\pi}|\phi(\theta, t)|dt = O\left(\frac{1}{(m-n)\delta_n^2}\right).$$

总結起来,存在满足下式的常数 C 和 C':

$$|f(\theta)-S_n(\theta)| < C\omega(0, 2\delta_n) + \frac{C'}{(m-n)\delta_n^2}.$$

利用这个結果,我們得到

$$J_1 \leqslant \left[C\omega(0, 2\delta_n) + \frac{C'}{(m-n)\delta_n^2}\right]\int_{-\delta_n}^{\delta_n} P_{N-1}(t)\,dt$$

$$< 2\pi\left[C\omega(0, 2\delta_n) + \frac{C'}{(m-n)\delta_n^2}\right].$$

置 $\delta_n = n^{-\frac{1}{2+\alpha}}$, 则 $(m-n)\delta_n^2 = (m-n)n^{-\frac{2}{2+\alpha}} > n^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}$, 从而

$$J_1 + J_2 + J_3 = O(\delta_n^\alpha) + O(n^{-\frac{\alpha}{2+\alpha}}) = O(\delta_n^\alpha),$$

故得 $\alpha_k = O(n_k^{-\frac{\alpha}{\alpha+2}})$, $\beta_k = O(n_k^{-\frac{\alpha}{\alpha+2}})$. 定理証毕.

8. 再論零系数特别多的富理埃級数

定理 1 設 $f(\theta) \sim \sum(\alpha_k \cos n_k\theta + \beta_k \sin n_k\theta)$ 是零系数特别多的富理埃級数. 假如在某一区間上 $f(\theta) < +\infty$, 那末 $\sum_1^\infty(|\alpha_k| + |\beta_k|) < \infty$.

这是 A. 齐革蒙特的定理(1931).

【証明】 我們将 $\mathfrak{S}[f]$ 写成 $\sum \rho_k \cos(n_k\theta + \theta_k)$ $(\rho_k \geqslant 0)$, 設 k_0 是一个很大的数, 要証 $\sum \rho_k < \infty$, 不妨假設 $\rho_k = 0$ $(k < k_0)$. 对于 $\varepsilon > 0$ $\left(\varepsilon < \frac{1}{2}\right)$, 取 r 适合

$$\lambda^r \geqslant \mu, \quad \mu > \frac{2}{1-2\varepsilon}, \quad \frac{1}{\mu-1} < \varepsilon.$$

置

$$P_{iK}(\theta) = \prod_{k=1}^{K}[1 + \cos(n_{i+kr}\theta + \theta_{i+kr})] \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

$$= 1 + G_1(\theta) + G_2(\theta) + \cdots + G_K(\theta),$$

$G_1(\theta) = \sum \cos(n_{i+kr}\theta + \theta_{i+kr})$, $G_2(\theta)$ 是两个余弦因子乘积的和, $\cdots$,

$$G_K(\theta)=\prod_{k=1}^{K}\cos(n_{i+kr}\theta+\theta_{i+kr}).$$

其中的 $G_\nu(\theta)$ 可以写成 $G_{\nu\nu}(\theta)+G_{\nu,\nu+1}(\theta)+\cdots+G_{\nu K}(\theta)$，这里 $G_{\nu j}(\theta)$ 中各項最高阶的因子是 $\cos(n_{i+jr}\theta+\theta_{i+jr})$，每項可以分解为 $2^{\nu-1}$ 个余弦項 $\cos(\nu\theta+\theta')$ 的和，和的系数是 $\frac{1}{2^{\nu-1}}$，$\nu\in\left(n_{i+jr}\frac{\mu-2}{\mu-1},\ n_{i+jr}\frac{\mu}{\mu-1}\right)$（参見 §7 定理 6 的証明）．由是，$\nu\geqslant\frac{1}{2}n_{i+jr}$；从而

$$\left|\int_\alpha^\beta\cos(\nu\theta+\theta')\,d\theta\right|\leqslant\frac{2}{\nu}\leqslant\frac{4}{n_{i+jr}}.$$

由于 $P_{iK}(\theta)=1+\sum_{j=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{j}G_{\nu j}(\theta)$，所以

$$\left|\int_\alpha^\beta[P_{iK}(\theta)-1]\,d\theta\right|\leqslant\sum_{j=1}^{K}\left\{\frac{4}{n_{i+jr}}+\sum_{\nu=2}^{j}2^{\nu-1}\binom{j-1}{\nu-1}\frac{1}{2^{\nu-1}}\frac{4}{n_{i+jr}}\right\}$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{K}\frac{4}{n_{i+jr}}\cdot2^{j-1}<\frac{4}{n_{i+r}}\left\{1+\frac{2}{\mu}+\left(\frac{2}{\mu}\right)^2+\cdots\right\}=\frac{4}{n_{i+r}}\frac{\mu}{\mu-2}.$$

由是，对于很小的 $\eta>0$，我們可以取足够大的 n_1 使

$$\left|\int_\alpha^\beta[P_{iK}(\theta)-1]\,d\theta\right|<\eta.$$

現在估計积分

$$\int_\alpha^\beta P_{iK}(\theta)\cos(m\theta+a)\,d\theta\quad(m\text{: 整数},\ a\text{: 常数}).$$

当 m 不等于任何 n_{i+jr} 时，那末对于 $G_{\nu j}(\theta)$ 中任一項 $\cos(\nu\theta+b)$，成立着 $|m-\nu|\geqslant C_\lambda n_{i+jr}$，从而

$$\left|\int_\alpha^\beta\cos(m\theta+a)\cos(\nu\theta+b)\,d\theta\right|\leqslant\frac{1}{m+\nu}+\frac{1}{|m-\nu|}\leqslant\frac{A_\lambda}{n_{i+jr}}.$$

由是

$$\left|\sum_{\nu=1}^{j}\int_\alpha^\beta G_{\nu j}(\theta)\cos(m\theta+a)\,d\theta\right|$$

$$\leqslant\frac{A_\lambda}{n_{i+jr}}+\sum_{\nu=2}^{j}\binom{j-1}{\nu-1}2^{\nu-1}\frac{1}{2^{\nu-1}}\frac{A_\lambda}{n_{i+jr}}\leqslant\frac{A_\lambda 2^j}{n_{i+jr}},$$

$$\left|\int_\alpha^\beta\cos(m\theta+a)P_{iK}(\theta)\,d\theta\right|$$

$$\leqslant\frac{2}{m}+A_\lambda\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^j}{n_{i+jr}}\leqslant\frac{2}{m}+\frac{2A_\lambda}{n_1}\frac{\mu}{\mu-2}<\eta,$$

这里 $m=n_q\geqslant n$, $m\neq n_{i+jr}$（这是落在 P_{iK} 中的）.

假如 m 等于某一 n_{i+jr}，那末置 $P_{iK}(\theta)=[1+\cos(n_{i+jr}\theta+\theta_{i+jr})]\cdot Q_{iK}(\theta)$. 我們見到

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta \cos(n_{i+jr}\theta+\theta_{i+jr})P_{iK}(\theta)d\theta\\
&\quad=\int_\alpha^\beta \cos(n_{i+jr}\theta+\theta_{i+jr})Q_{iK}(\theta)\,d\theta+\int_\alpha^\beta \cos^2(n_{i+jr}\theta+\theta_{i+jr})Q_{iK}(\theta)\,d\theta\\
&\quad=\int_\alpha^\beta Q_{iK}(\theta)\cos(n_{i+jr}\theta+\theta_{i+jr})d\theta+\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta Q_{iK}(\theta)\,d\theta\\
&\qquad+\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta Q_{iK}(\theta)\cos(2n_{i+jr}\theta+2\theta_{i+jr})d\theta.
\end{aligned}$$

取适当大的 n_1，我們可使第一項小于 η，第二項与 $(\beta-\alpha)/2$ 的差小于 $\frac{1}{2}\eta$. 由于 $\mu>2/(1-2\varepsilon)$，所以

$$(1+2\varepsilon)n_{i+(j-1)r}\leqslant 2n_{i+jr}\leqslant n_{i+(j+1)r}(1-2\varepsilon),$$

从而 $2n_{i+jr}$ 不属于任一 $[n_{i+kr}(1+2\varepsilon),\ n_{i+(k+1)r}(1-2\varepsilon)]$，上式第三項的积分小于 $\frac{1}{2}\eta$. 总結起来，

$$\left|\int_\alpha^\beta \cos(n_{i+jr}\theta+\theta_{i+jr})P_{iK}(\theta)\,d\theta-\frac{\beta-\alpha}{2}\right|<2\eta.$$

假如在 (α,β) 上，$S_n(\theta)\leqslant M$，那末

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta S_{Kr}(\theta)P_{iK}(\theta)d\theta\leqslant M\int_\alpha^\beta P_{iK}(\theta)d\theta&\leqslant M(\beta-\alpha+\eta)\\
&\leqslant(2\pi+\eta)M.
\end{aligned}$$

另一方面，上式左端等于

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{r}\sum_{j=0}^{K-1}\rho_{s+jr}\int_\alpha^\beta \cos(n_{s+jr}\theta+\theta_{s+jr})P_{iK}(\theta)\,d\theta\\
&\qquad\geqslant\sum_{j=0}^{K-1}\rho_{i+jr}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}-2\eta\right)-\eta\sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{r}{}'\sum_{j=0}^{K-1}\rho_{s+jr}.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta S_{Kr}(\theta)P_{iK}(\theta)d\theta&>\frac{\beta-\alpha}{2}\sum_{j=0}^{K-1}\rho_{i+jr}-2\eta\sum_{s=1}^{r}\sum_{j=1}^{K-1}\rho_{s+jr}\\
&=\frac{\beta-\alpha}{2}\sum_{j=1}^{K-1}\rho_{i+jr}-2\eta\sum_{k=1}^{Kr}\rho_k.
\end{aligned}$$

关于 i 相加:

$$(2\pi+\eta)Mr > \frac{\beta-\alpha}{2}\sum_{k=1}^{Kr}\rho_k - 2\eta r\sum_{k=1}^{Kr}\rho_k.$$

假如 $\eta<\frac{\beta-\alpha}{8r}$, 那末我們得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k \leqslant \frac{4}{\beta-\alpha}(rM+2\pi+r)<\infty.$$

設 $\sigma_n(\theta)$ 是 $\mathfrak{S}[f]$ 的費耶和,那末

$$S_K(\theta)-\sigma_K(\theta)=\frac{1}{n_K}\sum_{1}^{K}n_\nu\rho_\nu\cos(n_\nu\theta+\theta_\nu)\leqslant\frac{1}{n_K}\sum_{1}^{K}n_\nu\rho_\nu$$

$$\leqslant\left(\rho_K+\frac{1}{\lambda}\rho_{K-1}+\cdots+\frac{1}{\lambda^{K-k}}\rho_k\right)+\max\rho_\nu\left(\frac{1}{\lambda^{K-k+1}}+\cdots\right)$$

$$\leqslant O\left(\max_{\nu>k}\rho_\nu\right)+O\left(\lambda^{-K+k}\right)<\varepsilon\quad(K>k).$$

假如在 (α,β) 上, $f(\theta)\leqslant M_1$; 从而 $\sigma_K(\theta)\leqslant M_1$. 因此

$$S_K(\theta)\leqslant M_1+\varepsilon\quad(K>k).$$

利用上面所得的結果, $\sum\rho_k<\infty$. 証明完毕.

定义 設 $\{n_k\}$ 是一自然数列. 假如任一自然数 n 可以表示成 $n=n_k+n_l$ 或 $n=n_k-n_l$ 的式样的种数是有界,那末称 $\{n_k\}$ 具有性质 B_2.

系 任一缺項特别多的自然数列 $\{n_k\}$ 具有性质 B_2.

【証明】 設 $n_k>n_l$, 則两数 n_k 和 n_l 的和 n 满足 $n_k<n<n_k\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)$,

$$n\frac{\lambda}{1+\lambda}<n_k<n.$$

而两数的差 $n=n_k-n_l$ 适合 $n_k\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)<n<n_k$, 即

$$n<n_k<n\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

由是,当 n 可以写成 $n=n_k\pm n_l$ 时,成立着 $\frac{\lambda}{\lambda+1}n<n_k<n\frac{\lambda}{\lambda-1}$. 設区間 $\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}n,\ \frac{\lambda}{\lambda-1}n\right)$ 中最大的 n_k 是 n_{q+s}, 最小的 n_k 是 n_q:

$$n_{q+s}<n\frac{\lambda}{\lambda-1},\quad n_q>n\frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

由于 $n_{q+s}/n_q \geqslant \lambda^s$，所以 $\lambda^s < \dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}$，$s$ 是和 n 无关系的. n_k 可以取 n_q，$n_{q+1}, \cdots, n_{q+s}$ 中的一个数；而 n_l 可以取 $n_j = n - n_k$ 或是 $n_j = n_k - n$. 对于一定的 n，只有有限(有界)个 n_k，从而只有有限个 n_l. 証明完毕.

定理 2 假如 $\{n_k\}$ 具有性质 B_2，那末当 $\sum(\alpha_k^2+\beta_k^2)<\infty$ 时，三角級数 $\sum(\alpha_k \cos n_k\theta + \beta_k \sin n_k\theta)$ 几乎处处收斂.

这是埃尔竇許(P. Erdös, 匈牙利人)的定理(美国麻省理工学院数理期刊, 1943).

假如所設級数的零系数是特别多的,那末定理 2 就是 §7 的定理 1.

我們首先建立西童 (S. Szidon) 的

引理 1 假如 $\{n_k\}$ 具有性质 B_2，那末两个三角多項式

$$T(\theta) = \sum_{k=1}^{m} c_k \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n_k\theta$$

都滿足不等式

$$\int_0^{2\pi} [T(\theta)]^4 d\theta \leqslant C\left(\int_0^{2\pi} [T(\theta)]^2 d\theta\right)^2,$$

C 和 m；$c_1, \cdots, c_m$ 无关系.

【証明】 右端的积分等于

$$\left(\pi \sum_{k=1}^{m} c_k^2\right)^2 = \pi^2\left(\sum_{k=1}^{m} c_k^4 + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_k^2 c_j^2\right).$$

設 $T^2(\theta) \sim \dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\theta$，則上式等于 $\pi\left[\dfrac{1}{2}A_0^2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k^2\right]$. 詳細地計算起来,以余弦函数为例：

$$T^2(\theta) = \left[\sum_{k=1}^{m} c_k \cos n_k\theta\right]^2 = \sum_{k=1}^{m} c_k^2 \cos^2 n_k\theta + \sum_{(\neq)}\sum c_k c_j \cos n_k\theta \cos n_j\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k^2 + \sum_{k=1}^{m} c_k^2 \cos 2n_k\theta\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k\neq j}\sum c_k c_j (\cos(n_k+n_j)\theta + \cos(n_k-n_j)\theta).$$

由是 $A_p \cos p\theta$ 中的 $p = n_k + n_j$ 或是 $p = |n_k - n_j|$，从而

$$A_p = \frac{1}{2}\sum_{k\neq j} c_k c_j \quad (p = n_k + n_j \text{ 或是 } p = |n_k - n_j|).$$

由于 $\{n_k\}$ 具有性质 B_2，所以上式中項数不超过与 p 无关的一个数 s. 因此

$$\left(\sum_{k,j} c_k c_j\right)^2 \leqslant s \sum_{k,j} c_k^2 c_j^2,$$

$$\sum_{p=1}^{m} A_p^2 \leqslant s \sum_{k=1}^{m} c_k^2 \sum_{j=1}^{m} c_j^2.$$

由是即得所要的結果.

引理 2 設有 n 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，其平方之和 $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 = \varepsilon$，則必有如下的 l:

$$a_l' + a_l'' = a_l,\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{l-1}^2 + a_l'^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2},\ \ a_l''^2 + a_{l+1}^2 + \cdots + a_n^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|a_l'| \leqslant |a_l|, \quad |a_l''| \leqslant |a_l|.$$

【証明】 假如存在如下的 q: $\sum_{\nu=1}^{q} a_\nu^2 = \sum_{\nu=q+1}^{n} a_\nu^2 = \frac{\varepsilon}{2}$，那末置 $l = q+1$,

$$a_{q+1}' = 0, \quad a_{q+1}'' = a_{q+1}$$

好了. 假如不存在如上述的 q，那末有如下的 l:

$$a_1^2 + \cdots + a_{l-1}^2 < \frac{\varepsilon}{2} < a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_l^2,$$

正数 $\frac{\varepsilon}{2} - (a_1^2 + \cdots + a_{l-1}^2) = \delta$ 小于 a_l^2，而

$$a_{l+1}^2 + \cdots + a_n^2 = \varepsilon - (a_1^2 + \cdots + a_l^2) = \varepsilon - \left(\frac{\varepsilon}{2} - \delta\right) - a_l^2$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \delta - a_l^2.$$

因此，置 $a_l' = \delta / a_l$, $a_l'' = a_l - a_l'$，則 $a_l' + a_l'' = a_l$,

$$a_l'^2 = \frac{\delta^2}{a_l^2} < a_l^2, \quad |a_l''| = |a_l| - |a_l'| < |a_l|.$$

由于 $a_l'^2 < \delta$，所以 $a_1^2 + \cdots + a_{l-1}^2 + a_l'^2 = \frac{\varepsilon}{2} - \delta + a_l'^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$;

$$a_l''^2 + a_{l+1}^2 + \cdots + a_n^2 = \frac{\varepsilon}{2} + \delta - a_l^2 + \left(a_l - \frac{\delta}{a_l}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{2} - \delta + a_l'^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

引理 2 証明完毕.

引理 3 設 $\varphi_n(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1;\ n=0,1,\cdots)$ 是一个就范的直交函数系，$\sum c_n^2<\infty$，$S_n(x)=\sum\limits_{\nu=0}^{n}c_\nu\varphi_\nu(x)$，則当 $\dfrac{1}{n_k}+\dfrac{1}{n_{k+1}}+\cdots=O\left(\dfrac{1}{n_k}\right)$，$n_\nu<n_{k+1}$，$\sum\limits_{\nu=0}^{n_k}S_\nu(x)/n_k$ 概收斂于 $f(x)$时，函数列 $S_{n_k}(x)$ $(k=1,2,\cdots)$ 在 $(0,1)$ 上概收斂于 $f(x)$.

【証明】 置 $\sigma_n(x)=\dfrac{1}{n+1}[S_0(x)+\cdots+S_n(x)]$，則因

$$S_n(x)-\sigma_n(x)=\frac{1}{n+1}[c_1\varphi_1(x)+2c_2\varphi_2(x)+\cdots+nc_n\varphi_n(x)],$$

我們見到

$$\int_0^1[S_n(x)-\sigma_n(x)]^2dx=\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu'^2,\quad c_\nu'=\nu c_\nu.$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\int_0^1[S_{n_k}-\sigma_{n_k}]^2dx&=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(n_k+1)^2}\sum_{\nu=1}^{n_k}c_\nu'^2\\&=\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{\nu=n_{k-1}+1}^{n_k}c_\nu'^2\sum_{j=k}^{N}\frac{1}{(n_j+1)^2}\right)\\&=\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{\nu=n_{k-1}+1}^{n_k}c_\nu'^2O(n_k^{-2})\right]=\sum_{\nu=1}^{N}O(c_\nu^2)=O(1).\end{aligned}$$

由富酌尼的定理，$S_{n_k}(x)-\sigma_{n_k}(x)$ 概收斂于 0. 因此

$$f(x)-S_{n_k}(x)=[f(x)-\sigma_{n_k}(x)]+[\sigma_{n_k}(x)-S_{n_k}(x)]$$

概收斂于0. 証明完毕.

【定理 2 的証明】 置 $P_m(\theta)=\sum\limits_{2^m\leqslant n_k<2^{m+1}}a_k\cos n_k\theta$，$\varepsilon_m=\sum\limits_{2^m\leqslant n_k<2^{m+1}}a_k^2$，則因 $2^{-m}+2^{-m-1}+\cdots=2\cdot 2^{-m}$，由引理 3，級数

$$\sum P_m(\theta)=\sum\sqrt{\varepsilon_m}\left(\frac{P_m(\theta)}{\sqrt{\varepsilon_m}}\right)$$

几乎处处收斂. 因此，要証 $\sum a_k\cos n_k\theta$ 是一概收斂級数，只要証明：当 $2^m\leqslant q<2^{m+1}$ 时，

$$\sum_{2^m\leqslant n_k<q}a_k\cos n_k\theta\to 0\quad(m\to\infty).$$

我們暂称引理 2 中关于 $a_1,\cdots,a_n$ 的处理，为将 $a_1,\cdots,a_n$ 的平方和划分为两部分. 現在将 $P_m(\theta)$ 的系数 $a_{2^m},\cdots,a_{2^{m+1}-1}$ 的平方和

$A(P_m)$划分为两部分,再将每一部分的平方和划分为两部分,經过 s 次划分,将 $P_m(\theta)$ 的系数,以平方和划分成 2^s 个部分,記所划分的部分为 $P_{ms}^{(i)}(\theta)$ $(i=1, 2, \cdots 2^s)$,那末

$$A(P_{ms}^{(i)})=\frac{\varepsilon_m}{2^s} \quad (i=1, 2, \cdots, 2^s).$$

設满足 $|P_{ms}^{(i)}(\theta)|^2>s\sqrt{\frac{\varepsilon_m}{2^s}}$ 的 $\theta[\theta\in(0, 2\pi)]$ 的全体,成一点集 $E_{ms}^{(i)}$,則

$$\int_0^{2\pi}[P_{ms}^{(i)}(\theta)]^4 d\theta\geqslant\int_{E_{ms}^{(i)}}[P_{ms}^{(i)}(\theta)]^4 d\theta\geqslant s^2\frac{\varepsilon_m}{2^s}|E_{ms}^{(i)}|.$$

另一方面,由引理1,成立着

$$\int_0^{2\pi}[P_{ms}^{(i)}(\theta)]^4 d\theta\leqslant C\left[\int_0^{2\pi}[P_{ms}^{(i)}(\theta)]^2 d\theta\right]^2$$

$$=C[\pi A(P_{ms}^{(i)})]^2=K\frac{\varepsilon_m^2}{2^{2s}},$$

这里 K 是一个常数. 由是 $|E_{ms}^{(i)}|\leqslant K\varepsilon_m 2^{-s}s^{-2}$ $(i=1, 2, \cdots, 2^s)$. 置

$$E_m^{(s)}=\sum_{i=1}^{2^s}E_{ms}^{(i)}, \quad E_m=\sum_{s=1}^{\nu}E_m^{(s)},$$

这里的 ν 是足够大的数,将 $P_m(\theta)$ 分成 2^ν 部分,使其每一部分所含不多于两項. 置 $\limsup\limits_{m\to\infty}E_m=\mathscr{E}$. 由于

$$|E_m|\leqslant\varepsilon_m\sum s^{-2}=O(\varepsilon_m), \ \sum\varepsilon_m=\sum\alpha_k^2<\infty,$$

所以 $\sum|E_m|<\infty$, $|\mathscr{E}|=0$. 現在要証 $\sum\alpha_k\cos n_k\theta$ 概收斂. 事实上,它在 $C\mathscr{E}$ 上到处收斂,証明如下.

設 $\theta_0\in C\mathscr{E}$, 則必有 m_0: 当 $m\geqslant m_0$ 时, $\theta_0\overline{\in}E_m=\sum\limits_{s=1}^{\nu}E_m^{(s)}$; 从而

$$|P_{ms}^{(i)}(\theta_0)|^2\leqslant s\sqrt{\varepsilon_m 2^{-s}} \quad (s=1, 2, \cdots, \nu).$$

我們可以証明

$$\left|\sum_{2^m\leqslant n_k<q}\alpha_k\cos n_k\theta_0\right|\leqslant\max_{2^m\leqslant n_k<q}|\alpha_k|+\sum_{s=1}^{\nu}(s\sqrt{\varepsilon_m 2^{-s}})^{\frac{1}{2}}.$$

事实上,經过一次又一次的划分,最后可能还留着一个項,这就产生着 $\max|\alpha_k|$ 的一項于上式,由是,上式左端小于

$$\sqrt{\varepsilon_m}+\varepsilon_m^{1/4}\sum_{s=1}\sqrt{s\,2^{-s/2}}=O(\varepsilon_m^{1/4})=o(1).$$

由是，$\sum \alpha_k\cos n_k\theta$ 概收斂．同样可証 $\sum\beta_k\sin n_k\theta$ 概收斂．証明完毕．

后来，我們将举例說明：几乎处处收斂于 0 的三角級数未必系数个个都是 0．但是在零系数特别多的情况，我們有如下的

定理 3 設 $\sum(\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta)$ 是一个零系数特别多的三角級数．假如这个級数在正測度的一个点集 E 上收斂于 0，那末 $\alpha_k=\beta_k=0$ $(k=1,2,\cdots)$．

在証明之前，我們先証明

定理 3′ 假如定理 3 中的級数在 $E(|E|>0)$ 上收斂于絕对連續函数 $F(\theta)$，那末逐項微分而得的級数

$$\sum n_k(\beta_k\cos n_k\theta-\alpha_k\sin n_k\theta)$$

在 E 上概收斂于 $F(\theta)$ 的漸近导数 $F^{(1)}(\theta)$，并且 $\sum n_k^2(\alpha_k^2+\beta_k^2)<\infty$．

这是齐革蒙特 (TAMS 34, 1932) 的定理．

【証明】 点集 E 上的絕对連續函数 $F(\theta)$ 的意义是：存在含有 E 的一个区間，在此区間上的一个絕对連續函数 $\varphi(\theta)$ 适合于

$$\varphi(\theta)=F(\theta)\quad(\theta\in E).$$

在上述的区間上，$\varphi'(\theta)$ 存在的 θ 的全体成一点集 H，H 的密度点所成的(最大)点集是 H_1．設 $E_1=EH_1$，則 $|E_1|=|E|$．

这里我們应用烏里耶諾夫 (П. Л. Ульянов) 的引理(証明在后)．对于任一正数 ε，E_1 中存在如下的子集 $\mathscr{E}$ 以及 $h_n\downarrow 0$：$|\mathscr{E}|>|E_1|-\varepsilon$，当 $\theta_0\in\mathscr{E}$ 时，

$$\theta_0+h_n\in E_1,\quad \theta_0-h_n\in E_1.$$

由是，$(F(\theta_0+h_n)-F(\theta_0-h_n))/2h_n=(\varphi(\theta_0+h_n)-\varphi(\theta_0-h_n))/2h_n\to\varphi'(\theta_0)$．另一方面，当 $\theta\in E$ 而 $\theta\to\theta_0$ 时，成立着

$$\frac{F(\theta)-F(\theta_0)}{\theta-\theta_0}=\frac{\varphi(\theta)-\varphi(\theta_0)}{\theta-\theta_0}\to\varphi'(\theta_0).$$

因此，在点 θ_0，漸近导数 $F^{(1)}(\theta_0)$ 存在而等于 $\varphi'(\theta_0)$．从而，在 $\mathscr{E}$ 上成立着

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(\theta+h_n)-F(\theta-h_n)}{2h_n}=F^{(1)}(\theta).$$

由于 ε 的任意性，上式在 E 上几乎处处成立.

其次，我們要証明 $\alpha_k\to 0$, $\beta_k\to 0$. 更一般地，我們可以从

$$\rho_n\cos(n\theta+a)\to 0 \quad (\theta\in E,\ |E|>0)$$

断定 $\rho_n\to 0$. 或是証明 $|\cos(n\theta+a_n)|$ 在 E 的积分大于正的常数就够了，这是

$$\lim_{n\to\infty}\int_E 2\cos^2(n\theta+a_n)d\theta=|E|$$

的一个結果. 最后的积分等于

$$\int_E (1+\cos 2n\theta\cos 2a_n-\sin 2n\theta\sin 2a_n)\,d\theta\to|E|,$$

事实上，E 上的特征函数的富理埃系数是

$$\frac{1}{\pi}\int_E \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,k\theta\,d\theta\to 0.$$

现在，从 $\alpha_k\to 0$, $\beta_k\to 0$ 导出 $\sum_{k=1}^{K} n_k(|\alpha_k|+|\beta_k|)=o(n_K)$. 等式的左端小于

$$n_{[K/2]}\max_{k<\frac{1}{2}K}(|\alpha_k|+|\beta_k|)+\max_{k>\frac{1}{2}K}(|\alpha_k|+|\beta_k|)n_K\left(1+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}+\cdots\right)$$

$$=n_K O\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{K/2}+o(n_K)=o(n_K).$$

由于

$$\frac{F(\theta_0+h_n)-F(\theta_0-h_n)}{2h_n}=\sum\frac{1}{2h_n}\{\alpha_k(\cos n_k(\theta_0+h_n)-\cos n_k(\theta_0-h_n))$$

$$+\beta_k(\sin n_k(\theta_0+h_n)-\sin n_k(\theta_0-h_n))\}$$

$$=\sum n_k(-\alpha_k\sin n_k\theta_0+\beta_k\cos n_k\theta_0)\frac{\sin n_k h_n}{n_k h_n}\to F^{(1)}(\theta_0).$$

設 $S_k(\theta_0)$ 表示級数 $S=\sum n_k(-\alpha_k\sin n_k\theta_0+\beta_k\cos n_k\theta)$ 的开始 k 项的和，那末，由于 $\alpha_k=o(1)$, $\beta_k=o(1)$, 上式可以改写成

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum\left[\frac{\sin n_k h_n}{n_k h_n}-\frac{\sin n_{k+1}h_n}{n_{k+1}h_n}\right]S_k(\theta_0)\right\}=F^{(1)}(\theta_0).$$

这是对于級数 S，用 $\|a_{nk}\|$ 求和法可以求和的表示式，这里

$$a_{nk}=\frac{\sin n_k h_n}{n_k h_n}-\frac{\sin n_{k+1}h_n}{n_{k+1}h_n},\quad a_{n0}=1-\frac{\sin n_1 h_n}{n_1 h_n}.$$

这个求和法满足如下的条件:

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk}=0\quad (k=0,1,\cdots),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}=\left(1-\frac{\sin n_1 h_n}{h_n n_1}\right)+\left(\frac{\sin n_1 h_n}{n_1 h_n}-\frac{\sin n_2 h_n}{n_2 h_n}\right)+\cdots=1.$$

由 §7 定理 3 的証明，我們断言：級数 $\sum n_k^2(\alpha_k^2+\beta_k^2)$ 是收斂的．所以 S 是一个富理埃級数．它的零系数是特別多的，S 几乎处处收斂，在 E 上，它概收斂于 $F^{(1)}(\theta)$．定理証毕，我們还要証明

烏里耶諾夫的引理 設 E 是 $[a, b]$ 中的一个正测度的点集，则对于任一正数 ε，存在点集 E_ε，当 $\theta\in E_\varepsilon$ 时，$\theta+h_n$ 和 $\theta+h_n$ 都属于 E，这里 $h_n\downarrow 0$，$|E_\varepsilon|>|E|-\varepsilon$.

【証明】 当 $\theta\in E$ 时，$\theta+h\in E_h$；当 $\theta\in E_h$ 时，$\theta-h\in E$ 的話，我們称 E_h 为 E 的 h 移动点集．

設 $f(\theta)$，$f_h(\theta)$，$f_{-h}(\theta)$ 分别是点集 E，E_h，E_{-h} 的特征函数，则因

$$f_h(\theta)=f(\theta-h),\quad f_{-h}(\theta)=f(\theta+h),$$

我們得到

$$|EE_hE_{-h}|=\int_a^b f(\theta)f(\theta+h)f(\theta-h)\,d\theta,\quad |E|=\int_a^b f^3(\theta)\,d\theta.$$

因此

$$\begin{aligned}0\leqslant |E|-|EE_hE_{-h}|&=\left|\int_a^b f(\theta)\,[f(\theta+h)f(\theta-h)-f^2(\theta)]\,d\theta\right|\\&\leqslant\int_a^b f(\theta+h)\,|f(\theta-h)-f(\theta)|\,d\theta+\int_a^b |f(\theta+h)-f(\theta)|\,f(\theta)\,d\theta\\&\leqslant\int_a^b |f(\theta-h)-f(\theta)|\,d\theta+\int_a^b |f(\theta+h)-f(\theta)|\,d\theta\to 0\quad (h\to 0).\end{aligned}$$

現在对于 $\varepsilon>0$，取 h_n 使 $|E|-|E_{-h_n}EE_{h_n}|<\varepsilon 2^{-n-1}$．置

$$E_0=\prod_{n=1}^{\infty}(E_{-h_n}EE_{h_n}),$$

则 $E_0\subset E$, $|E-E_0|<\sum \varepsilon 2^{-1-n}=\frac{1}{2}\varepsilon$. 从而 $|E_0|>|E|-\frac{1}{2}\varepsilon$. 取 $E_s=E_0$, 则当 $\theta_0\in E_s$ 时, $\theta_0\in E_{-h_n}EE_{h_n}$ $(n=1, 2, \cdots)$; $|E_s|>|E|-\varepsilon$. 証毕.

設 b 是一奇的整数, $0<a<1$; 我們熟知: 当 $ab>1+\frac{3}{2}\pi(1-a)$ 时,連續函数 $f(\theta)=\sum a^n\cos b^n\theta$ 无一处可以微分 (参見: 著者的《实函数論》第六章 §6 定理 3). 但是假如只假設 $0<a<1$, b 是适合 $ab\geqslant 1$ 的整数,那末,由于

$$n_k^2a_k^2=(b^ka^k)^2\geqslant 1,\quad \sum n_k^2a_k^2=\infty,$$

所以定理 3′ 告訴我們, $f(\theta)$ 在任何正测度的点集上,不可能具有絕对連續性,从而几乎处处无漸近导数,更不必說"有导数"了.

【定理 3 的証明】 由定理 3′, 級数 $\sum(\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta)$ 是一个 $\mathfrak{S}[F]$, 在 E 上, $F(\theta)=0$, 并且

$$\sum n_k(\beta_k\cos n_k\theta-\alpha_k\sin n_k\theta)=0.$$

对于这个級数,我們还可以应用定理 3′, 等等;我們断定

$$\sum n_k^{2s}(\alpha_k^2+\beta_k^2)<\infty,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^s}{d\theta^s}\{\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta\}=0$$

在 $\mathscr{E}$ 上成立, $|\mathscr{E}|=|E|$.

写着 $\frac{d^s}{d\theta^s}(\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta)=r_k\cos(n_k\theta+a_k)$, 那末

$$\int_{\mathscr{E}}\Big[\sum_{k=\nu}^{\infty}r_k\cos(n_k\theta+a_k)\Big]^2d\theta\geqslant\frac{1}{8}|\mathscr{E}|\sum_{k=\nu}^{\infty}r_k^2$$

当 ν 足够大时成立,这可以从 §7 定理 3 的証明知道. 由是,对于足够大的 k_0 (与 s 无关系),成立着

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}|\mathscr{E}|\sum_{k_0+1}^{\infty}r_k^2&\leqslant\int_{\mathscr{E}}\Big[\sum_{k=1}^{k_0}\frac{d^s}{d\theta^s}(\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta)\Big]^2d\theta\\&\leqslant\int_0^{2\pi}\Big[\sum_{k=1}^{k_0}\frac{d^s}{d\theta^s}(\alpha_k\cos n_k\theta+\beta_k\sin n_k\theta)\Big]^2d\theta\\&=\pi\sum_{k=1}^{k_0}n_k^{2s}(\alpha_k^2+\beta_k^2).\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} n_k^{2s}(\alpha_k^2+\beta_k^2) \leqslant \frac{8\pi}{|\mathscr{E}|} \sum_{k=1}^{k_0} n_k^{2s}(\alpha_k^2+\beta_k^2).$$

假如存在一个 k_1 使 $\alpha_{k_1}^2+\beta_{k_1}^2 \neq 0$ $(k_1>k_0)$，那末从上式得到

$$1<\left(\frac{n_{k_1}}{n_{k_0}}\right)^{2s} \leqslant \frac{8\pi}{|\mathscr{E}|(\alpha_{k_1}^2+\beta_{k_1}^2)} \sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{n_k}{n_{k_0}}\right)^{2s}(\alpha_k^2+\beta_k^2),$$

令 $s\to\infty$，右端的极限是

$$\frac{8\pi(\alpha_{k_0}^2+\beta_{k_0}^2)}{|\mathscr{E}|(\alpha_{k_1}^2+\beta_{k_1}^2)},$$

而左端趋向于 ∞，这是不可能的．因此，$\alpha_k=\beta_k=0$ $(k>k_0)$．

现在我們达到如下的結果：在 E 上成立着

$$\sum_{k=1}^{k_0}(\alpha_k \cos n_k\theta+\beta_k \sin n_k\theta)=0.$$

由于 $|E|>0$，所以一切 α_k 和 β_k 都等于 0．証明完毕．

9．零系数特别多的一級数

連續曲綫 $x=F(t)$，$y=G(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 可能塡滿一块面积，通常称这种曲綫为彼阿諾 (Peano) 曲綫*)．設 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上收斂，我們要問有沒有可能

$$f(e^{i\theta})=u(e^{i\theta})+iv(e^{i\theta}) \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

表示一条彼阿諾曲綫？这里 $u(z)=\mathrm{Re}\, f(z)$，$v(z)=\mathrm{Im}\, v(z)$．

R. 沙勒姆和 A. 齐革崇特 (丟克数学期刊 12, 1945) 証明了如下的結果．

定理 1 設 $\frac{4}{5}<b<1$，整数 a 不小于 100，則当 $z=e^{i\theta}$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 时，一級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b^n z^{a^n}$ 表示一条彼阿諾曲綫：

$$u=\sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos a^n\theta, \quad v=\sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin a^n\theta.$$

这个定理，著者們是从下述一般定理导出的．

*) 参見著者《实函数論》第四章 § 4．

定理 2 設 $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1$, $\sum |a_n| < \infty$, $f(z) = \sum_1^\infty a_k z^{n_k}$. 假如有 λ_0, 当 $\lambda > \lambda_0$ 时,

$$\lambda |a_1| + \lambda^2 |a_2| + \cdots + \lambda^p |a_p| \leqslant c(\lambda) \lambda^p \sum_{p+1}^\infty |a_n|,$$

那末 $f(e^{i\theta})$ 填满一个正方形.

在証明之前,我們应該注意: 光是 $f(z) = \sum a_k z^{n_k}$ 的零系数特别多, $f(e^{i\theta})$ 可能并不是一条彼阿諾曲綫. 例如

$$f(z) = \sum b^n z^{a^n} \quad (0 < ab < 1)$$

的話, $f'(z)$ 在 $|z| = 1$ 上处处存在.

又这里的 λ_0, 不明其为何数, 可能 $\lambda_0 = 1$, 但是很不显明.

【証明】 置 $a_n = r_n e^{i\phi_n}$, $r_n \geqslant 0$, $f(e^{i\theta}) = u + iv$,

$$\cos(n_k\theta + \phi_k) = A_k(\theta), \quad \sin(n_k\theta + \phi_k) = B_k(\theta),$$

从而 $u = \sum_1^\infty r_k A_k(\theta)$, $v = \sum_1^\infty r_k B_k(\theta)$. 我們将証: 正方形

$$-\left[2^{-\frac{1}{2}} - \eta \frac{3\lambda - 1}{\lambda - 1}\right] \sum_1^\infty r_k \leqslant \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \leqslant \left[2^{-\frac{1}{2}} - \eta \frac{3\lambda - 1}{\lambda - 1}\right] \sum_1^\infty r_k$$

中的任一点 (u, v) 是有 θ 满足 $f(e^{i\theta}) = u + iv$ 的. 这里

$$\frac{2\pi}{\lambda} < \eta < \frac{1 - c}{2^{\frac{1}{2}}(1 + c)} \frac{\lambda - 1}{5\lambda - 1}, \quad c = c(\lambda).$$

这种 η 的存在, 是需要条件

$$2\pi 2^{\frac{1}{2}}(1 + c)(5\lambda - 1) < (1 - c)\lambda(\lambda - 1)$$

的. 因此, 我們假設

$$c(\lambda) < \frac{\lambda(\lambda - 1) - 2\pi 2^{\frac{1}{2}}(5\lambda - 1)}{\lambda(\lambda - 1) + 2\pi 2^{\frac{1}{2}}(5\lambda - 1)},$$

这必須 $\lambda(\lambda - 1) - 2\pi 2^{\frac{1}{2}}(5\lambda - 1) > 0$, 从而 $\lambda > \lambda_0$ (易知 $\lambda_0 < 91$).

上述的 η 满足 $2\eta(c + 1)\left(1 + \frac{4\lambda}{\lambda - 1}\right) < \sqrt{2}(1 - c)$, 从而

$$c(\sqrt{2} + 2\eta) < \sqrt{2} - 2\eta - \frac{8\eta\lambda}{\lambda - 1}(c + 1) < \sqrt{2} - 2\eta - \frac{4\eta\lambda}{\lambda - 1}(c + 1)^2.$$

下面的事实是容易証明的：假如正項收斂級数 $s=\sum r_n$ 的項 r_n 满足 $r_n<r_{n+1}+r_{n+2}+\cdots$ $(r=1, 2, \cdots)$，那末对于 $(0, s)$ 中的任何数 x，取适当的 ε_n——$\varepsilon_n(\varepsilon_n-1)=0$——必可写成 $x=\sum\varepsilon_n r_n$.

由假設，$r_p<c(r_{p+1}+r_{p+2}+\cdots)$，从而

$$r_p+r_{p+1}+r_{p+2}+\cdots<(c+1)(r_{p+1}+r_{p+2}+\cdots).$$

所以

$$(\sqrt{2}+2\eta)\,r_p<(\sqrt{2}-2\eta)\sum_{k=p+1}^{\infty}r_k-\frac{4\eta\lambda}{\lambda-1}(c+1)\sum_{k=p}^{\infty}r_k.$$

写着 $\delta_1=0$, $\delta_p=2\eta\,[r_1\lambda^{2-p}+r_2\lambda^{3-p}+\cdots+r_{p-1}]$ $(p=2, 3, \cdots)$，那末

$$\sum_{k=p}^{\infty}\delta_k=\frac{2\eta\lambda}{\lambda-1}\left\{\frac{r_1\lambda+r_2\lambda^2+\cdots+r_{p-1}\lambda^{p-1}}{\lambda^{p-1}}+r_p+r_{p+1}+\cdots\right\}\ (p\geqslant 1),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k=\sum_{k=2}^{\infty}\delta_k.$$

这样一来，我們获得一个下文有用的“基本不等式”

$$(\sqrt{2}+2\eta)\,r_p<(\sqrt{2}-2\eta)(r_{p+1}+r_{p+2}+\cdots)-2\sum_{k=p}^{\infty}\delta_k.$$

由于 $\delta_1+\cdots=\dfrac{2\eta\lambda}{\lambda-1}(r_1+\cdots)$，所以我們所考慮的正方形是

$$(-2^{-\frac{1}{2}}+\eta)\sum_{k=1}^{\infty}r_k+\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\leqslant\frac{u}{v}\leqslant(2^{-\frac{1}{2}}-\eta)\sum_{k=1}^{\infty}r_k-\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k.$$

这里我們建立一个数論性質的

引理 設 $\{n_k\}$ 是一个整数叙列，$n_{k+1}/n_k\geqslant\lambda>2$；$\{\alpha_k\}$ 是一个数列；$\dfrac{2\pi}{\lambda}<\eta<\pi$. 那末在单位圓周上，存在如下的一列圓弧 $J_1, J_2, \cdots$：$J_1\supset J_2\supset\cdots$，$J_k$ 的弧是等于 $\dfrac{2\eta}{n_k}$，对于 J_k 的任一点 t，有整数 $m_k=m_k(t)$ 滿足不等式

$$|n_kt-\alpha_k-2\pi m_k|<\eta.$$

引理的証明是簡单的. 于 n_1 个点

$$\exp\{i(\alpha_1+2q\pi)n_1^{-1}\}\quad(q=0, 1, \cdots, n_1-1)$$

中，任取一点，作为 J_1 的中点，J_1 的弧长是 $\dfrac{2\eta}{n_1}$. J_1 含有下列 n_2 个点

$$\exp\{i(\alpha_2+2q\pi)n_2^{-1}\}\quad(q=0, 1, \cdots, n_2-1)$$

中的至少两个点，以其中一个为 J_2 的中心，作长为 $\frac{2\eta}{n_2}$ 的圓弧．圓弧 J_1 和 J_2 上的点 t 分别满足 $|n_k t-\alpha_k-2\pi m_k|<\eta$ $(k=1, 2)$ 是显然的．这个論法可以继續进行不止，从而知道引理成立．

設 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ 都是整数，任一 ε_k 是 1, 3, 5, 7 四个数中的一个．由上述的引理，存在着如下的圓弧：

$$J_1(\varepsilon_1)\supset J_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\supset J_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\supset\cdots\supset J_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k)\supset\cdots,$$

J_k 的长等于 $\frac{2\eta}{n_k}$，当 $t\in J_k(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$ 时，成立着不等式

$$\left|\cos(n_k t+\phi_k)-\cos\frac{\varepsilon_k\pi}{4}\right|<\eta, \quad \left|\sin(n_k t+\phi_k)-\sin\frac{\varepsilon_k\pi}{4}\right|<\eta.$$

这些式子，当 $\varepsilon_k=1$ 时，可以写成

$$2^{-\frac{1}{2}}-\eta<A_k(t)<2^{-\frac{1}{2}}+\eta, \quad 2^{-\frac{1}{2}}-\eta<B_k(t)<2^{-\frac{1}{2}}+\eta;$$

若 $\varepsilon_k=3$，则

$$-2^{-\frac{1}{2}}-\eta<A_k(t)<-2^{-\frac{1}{2}}+\eta, \quad 2^{-\frac{1}{2}}-\eta<B_k(t)<2^{-\frac{1}{2}}+\eta;$$

若 $\varepsilon_k=5$，则

$$-2^{-\frac{1}{2}}-\eta<A_k(t)<-2^{-\frac{1}{2}}+\eta, \quad -2^{-\frac{1}{2}}-\eta<B_k(t)<-2^{-\frac{1}{2}}+\eta;$$

若 $\varepsilon_k=7$，则

$$2^{-\frac{1}{2}}-\eta<A_k(t)<2^{-\frac{1}{2}}+\eta, \quad -2^{-\frac{1}{2}}-\eta<B_k(t)<-2^{-\frac{1}{2}}+\eta.$$

置 $w'=(2^{-\frac{1}{2}}+\eta)r_1+(-2^{-\frac{1}{2}}+\eta)\sum_{k=2}^{\infty}r_k+\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k$，则

$$(-2^{-\frac{1}{2}}+\eta)\sum_{k=1}^{\infty}r_k+\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k<w'<(2^{-\frac{1}{2}}-\eta)\sum_{k=1}^{\infty}r_k-\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k.$$

記左端的数为 w_1，右端的数为 w_1'．我們所考慮的正方形是

$$w_1\leqslant \frac{u}{v}\leqslant w_1'.$$

现在分做下面四个情况：

(i) $(u\geqslant w')(v\geqslant w')$， (ii) $(u\geqslant w')(v<w')$，

(iii) $(u<w')(v\geqslant w')$， (iv) $(u<w')(v<w')$

来考慮．对于(i)，(ii)，(iii)，(iv)，我們順次取 $\varepsilon_1=1, 7, 3, 5$．在各

种情况来考虑 $J(\varepsilon_1)$，于 $J(\varepsilon_1)$ 中固定一点 t_1. 假如 $u\geqslant w'$, 那末 ε_1 是 1 或是 7, 从而

$$2^{-\frac{1}{2}}-\eta< A_k(t_1) <2^{-\frac{1}{2}}+\eta,$$

$$u-A_1(t_1)r_1>u-(2^{-\frac{1}{2}}+\eta)r_1\geqslant w_1-(2^{-\frac{1}{2}}+\eta)r_1,$$

$$u-A_1(t_1)r_1<u-(2^{-\frac{1}{2}}-\eta)r_1\leqslant w_1'-(2^{-\frac{1}{2}}-\eta)r_1.$$

假如 $u<w'$, 那末 $(\varepsilon-3)(\varepsilon-5)=0$, 从而

$$u-A_1(t_1)r_1>u-(-2^{-\frac{1}{2}}+\eta)r_1\geqslant w_1-(-2^{-\frac{1}{2}}+\eta)r_1,$$

$$u-A_1(t_1)r_1<u-(-2^{-\frac{1}{2}}-\eta)r_1\leqslant w_1'-(-2^{-\frac{1}{2}}-\eta)r_1.$$

同样可証 $w_1-(-2^{-\frac{1}{2}}+\eta)r_1<v-B_1(t_1)r_1<w_1'-(-2^{-\frac{1}{2}}-\eta)r_1$.

簡写

$$\begin{matrix}u_1\\v_1\end{matrix}=\begin{matrix}u\\v\end{matrix}-\begin{matrix}A_1(t_1)r_1\\B_1(t_1)r_1\end{matrix},$$

則得

$$w_1-(-2^{-\frac{1}{2}}+\eta)r_1\leqslant \begin{matrix}u_1\\v_1\end{matrix}\leqslant w_1'-(-2^{-\frac{1}{2}}-\eta)r_1.$$

現在記 $w''=(2^{-\frac{1}{2}}+\eta)r_2+(-2^{-\frac{1}{2}}+\eta)\sum\limits_{k=3}^{\infty}r_k+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\delta_k$, 而考慮四种情况:

(i) $(u_1\geqslant w'')(v_1\geqslant w'')$, (ii) $(u_1\geqslant w'')(v_1<w'')$,

(iii) $(u_1<w'')(v_1\geqslant w'')$, (iv) $(u_1<w'')(v_1<w'')$.

并且决定 ε_2 如前. 于是乎有 $J(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\subset J(\varepsilon_1)$. 設 $t_2\in J(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, 則利用"基本不等式"在 $p=2$ 的情况,我們見到

$$w_2-(-2^{-\frac{1}{2}}-\eta)r_2\leqslant\begin{matrix}u_1-A_2(t_2)r_2\\v_1-B_2(t_2)r_2\end{matrix}\leqslant w_2'-(2^{-\frac{1}{2}}-\eta)r_2,$$

这里 $w_2=(-2^{-\frac{1}{2}}+\eta)\sum\limits_{2}^{\infty}r_k+\sum\limits_{2}^{\infty}\delta_k$, $w_2'=(2^{-\frac{1}{2}}-\eta)\sum\limits_{2}^{\infty}r_k-\sum\limits_{2}^{\infty}\delta_k$,

$$\left.\begin{matrix}u_1-A_2(t_2)r_2\\v_1-B_2(t_2)r_2\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}u-A_1(t_1)r_1-A_2(t_2)r_2,\\v-B_1(t_1)r_1-B_2(t_2)r_2,\end{matrix}\right.$$

将 t_2 代 t_1 的話,所差不至于很大;事实上, $|J(\varepsilon_1)|=2\eta/n_1$, 从而

$$|A_1(t_1)-A_1(t_2)|r_1\leqslant|t_1-t_2|n_1r_1\leqslant\frac{2\eta}{n_1}n_1r_1=\delta_2,$$

由是，写着 $w_3=(-2^{-\frac{1}{2}}+\eta)\sum_3^{\infty}r_k+\sum_3^{\infty}\delta_k$，$w_3'=(2^{-\frac{1}{2}}-\eta)\sum_3^{\infty}r_k-\sum_3^{\infty}\delta_k$，

$$\begin{cases} u_2 \\ v_2 \end{cases}=\begin{cases} u-A_1(t_2)r_1-A_2(t_2)r_2, \\ v-B_1(t_2)r_1-B_2(t_2)r_2, \end{cases}$$

我們見到

$$w_3\leqslant\frac{u_2}{v_2}\leqslant w_3'.$$

这样一来，記着 $w'''=w_3+2^{\frac{1}{2}}r_3$，依照

(i) $(u_2\geqslant w''')(v_2\geqslant w''')$，　(ii) $(u_2\geqslant w''')(v_2<w''')$，

(iii) $(u_2<w''')(v_2\geqslant w''')$，　(iv) $(u_2<w''')(v_2<w''')$

四种情况，决定 $J(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 和 t_3 而进行如前。从而获得

$$w_3-(-2^{-\frac{1}{2}}+\eta)r_4\leqslant\begin{Bmatrix} u-A_1(t_2)r_1-A_2(t_2)r_2-A_3(t_3)r_3 \\ v-B_1(t_2)r_1-B_2(t_2)r_2-B_3(t_3)r_3 \end{Bmatrix}$$

$$\leqslant w_3'-(2^{-\frac{1}{2}}-\eta)r_4.$$

于此以 t_3 代 t_2，"相差"是 δ_3。事实上，t_2 和 t_3 所属的 $J(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$，其长等于 $\frac{2\eta}{n_2}$，而

$$|A_1(t_2)-A_1(t_3)|r_1+|A_2(t_2)-A_2(t_3)|r_2\leqslant|t_2-t_3|(n_1r_1+n_2r_2)$$

$$<\frac{2\eta}{n_2}(n_1r_1+n_2r_2)<2\eta\left(\frac{r_1}{\lambda}+r_2\right)=\delta_3.$$

这个手續，可以继續进行而无限制：由于 $t_p\in J(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$，所以 $t_p\to t$；又因 $\sum r_k$ 和 $\sum\delta_k$ 都是收斂級数，所以成立着

$$\lim_{p\to\infty}[u-A_1(t_p)r_1-\cdots-A_p(t_p)r_p]=0.$$

另一方面，

$$\sum_{k=1}^{p}|A_k(t_p)-A_k(t)|r_k<|t_p-t|\sum_{k=1}^{p}n_kr_k<\frac{2\eta}{n_p}\sum_{k=1}^{p}n_kr_k$$

$$<2\eta\left(\frac{r_1}{\lambda^{p-1}}+\cdots+r_p\right)=\delta_{p+1};$$

从而 $\lim_{p\to\infty}\left[u-\sum_{k=1}^{p}A_k(t)r_k\right]=0$。或是 $\sum A_k(t)r_k=u$。同样，

$$\sum_{k=1}^{\infty}B_k(t)r_k=v.$$

証明完毕.

第 四 章

富理埃級数的絕对收斂与絕对求和

1．著名的几种絕对求和法

不收斂的級数,我們用适当的求和法来求它的和;相反地,可求和的級数,課以更严格的要求,例如要絕对地求它的和.对于蔡查罗求和法,弗克得(M. Fekete)于1911年,創造出如下的概念:設 σ_n^α 是級数 $\sum u_n$ 的第 n 个 α 級的蔡查罗平均值——$\sigma_n^\alpha=\frac{1}{(\alpha)_n}\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha-1)_{n-\nu}S_\nu$, $S_\nu=u_0+\cdots+u_\nu$——,那末当級数 $\sum_n|\sigma_n^{(\alpha)}-\sigma_{n-1}^{(\alpha)}|$ 收斂时,称 $\sum u_n$ 可用 α 級的蔡查罗平均法絕对地可以求和,簡写着

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=S\,|C,\ \alpha|,$$

这里 $S=\lim_{n\to\infty}\sigma_n^\alpha$. 事实上, $\sum|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|<\infty$ 含有 $\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha)=S$ $(\sigma_{-1}^\alpha=0)$.

当 $\sum|S_n-S_{n-1}|<\infty$ 时,我們說:$\{S_n\}$ 是有界变差的数列. 假如一級数 $\sum_0^\infty u_nx^n$ 当 $0\leqslant x<1$ 时收斂,并且在(0, 1)上表示一个有界变差函数,那末极限 $f(1-0)$ 存在,此时我們說 $\sum u_n$ 可用阿培耳求和法絕对

地可以求和，我們写着

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f(1-0) \quad (|A|).$$

这种絕对求和法是忽脫荷(J. M. Whittaker, 1930)所創的.

下面是說一种較$|C, \alpha|$ $(\alpha>0)$更广的絕对求和法．設 $p_0>p_1>\cdots$, $p_n>0$, $p_0+p_1+\cdots+p_n\to\infty$. 写着

$$t_n = \frac{p_n S_0 + p_{n-1} S_1 + \cdots + p_0 S_n}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n}.$$

假如数列 $\{t_n\}$ 是有界变差，那末我們說：数列 $\{S_n\}$ 或是級数 $\sum u_n$——$S_n = u_0 + \cdots + u_n$——可用以 $\{p_n\}$ 为系数的耨棱特 (N. E. Nörlund, 1919) 求和法絕对地可以求和，并且写着

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S\,|N, p_n| \quad (S = \lim t_n).$$

設 $0<\lambda_n \uparrow \infty$, $k>0$; 写着

$$A_\lambda^k(\omega) = \sum_{\lambda_n \leqslant \omega} (\omega - \lambda_n)^k u_n,$$

当 $\omega^{-k} A_\lambda^k(\omega) \to S$ $(\omega\to\infty)$ 时，我們說：$\sum u_n$ 可用 λ 式的 k 次黎斯 (M. Riesz) 求和法 (R, λ, k) 求和．假如对于某一正数 ω_0，函数 $\omega^{-k} A_\lambda^k(\omega)$ 在(ω_0, ∞)中是有界变差，那末我們写着

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S\,|R, \lambda, \infty|, \quad (S = \lim \omega^{-k} A_\lambda^k(\omega)).$$

这种絕对求和法，是 N. 奥勃勒許可夫 (Obrechkoff) 于 1928 年所想出的．

首先我們希望明白的問題是：富理埃級数 $\mathfrak{S}[f]$ 在一点 θ_0 的 $|A|$ 求和法，是否是 $f(\theta)$在 θ_0 的一个"地方性"(局部性)? 从下述忽脫荷的定理給这个問題以肯定的回答.

定理 1 假如 $\mathfrak{S}[f]$ 在 θ_0 滿足狄尼的收斂条件，那末

$$\mathfrak{S}[f; \theta_0] = f(\theta_0) \ (|A|).$$

【証明】 我們不妨假設 $\theta_0=0$，并且不妨假設 $f(\theta_0)=0$. 我們要从 $f(t)/t \in L(-\delta, \delta)$ $(\delta>0)$，导出 $J'(r) \in L(0, 1)$，这里

$$J(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} f(t)\,dt.$$

略事計算，我們得到

$$0\leqslant\frac{2r(1-\cos t)}{(1-2r\cos t+r^2)^2}=\frac{(1-r)^2\cos t}{(1-2\cos t+r^2)^2}-\frac{\partial P_r(t)}{\partial r},$$

这里

$$P_r(t)=\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t+r^2)}.$$

写着

$$I(r)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}P_r(t)\,|f(t)|\,dt,$$

我們要計算 $\int_0^1|I'(r)|\,dr$. 首先

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2r(1-\cos t)}{(1-2r\cos t+r^2)^2}|f(t)|\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[P_r(t)\frac{2(1-r)}{(1+r)}\ \frac{\cos t}{1-2r\cos t+r^2}-\frac{\partial P_r}{\partial r}\right]|f(t)|\,dt.$$

被积函数是正的，所以我們可以在 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots dt$ 的內部施行 $\int_0^1\cdots dr$，从而得到

$$\int_0^1 dr\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2r(1-\cos t)}{(1-2r\cos t+r^2)^2}\ |f(t)|\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|f(t)|\int_0^1\left[P_r(t)\,\frac{2(1-r)}{1+r}\ \frac{\cos t}{1-2r\cos t+r^2}-\frac{\partial P_r}{\partial r}\right]dr\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|f(t)|\left[\int_0^1 P_r(t)\,\frac{2(1-r)^2}{1+r}\ \frac{\cos t}{1-2r\cos t+r^2}dr+1\right]dt.$$

記左端的积分为 K，注意到 $1-2r\cos t+r^2=(1-r)^2+2r(1-\cos t)$，就知道

$$K\leqslant\frac{9}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|f(t)|\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{P_r(t)\,|f(t)|}{\sqrt{1-2r\cos t+r^2}}\,dt\,dr$$

$$<3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|f(t)|\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}P_r(t)\frac{|f(t)|}{\sqrt{1-\cos t}}\,dt\,dr.$$

由于 $g(t)\equiv f(t)/\sqrt{1-\cos t}\in L(-\pi,\pi)$(狄尼条件),所以

$$K<3\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt+\int_0^1\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P_r(t)g(t)dt\,dr.$$

末項是一有限数,从而 K 是一有限数.当 $\cos t\leqslant 0$ 时,

$$1-2r\cos t+r^2\geqslant(1-r)^2+2r=1+r^2.$$

从而

$$2r(1-\cos t)(1-2r\cos t+r^2)^{-2}\leqslant 4r(1+r^2)^{-2},$$

$$\int_0^1 dr\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2r(1-\cos t)}{(1-2r\cos t+r^2)^2}|f(t)|dt$$

$$\leqslant K+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{4r}{(1+r^2)^2}dr\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt=K_1.$$

这样一来,我們得到

$$\int_0^1|J'(r)|dr\leqslant K_1+\frac{1}{\pi}\int_0^1 dr\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r)^2|\cos t|}{(1-2r\cos t+r^2)^2}|f(t)|dt$$

$$\leqslant K_1+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^1 dr\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t)\frac{|f(t)|}{\sqrt{1-\cos t}}dt+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}dr\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt<\infty.$$

这就証明了 $\mathfrak{S}[f;0]=f(0)(|A|)$. 定理証毕.

一般地說,絕对收斂的級数 $\sum u_n$ 必可用$(|A|)$法求和. 就是說,$\sum|u_n|<\infty$ 含有函数 $f(r)=\sum u_n r^n$ 在$[0,1]$中是有界变差. 簡单地說,$|C,0|\supset|A|$. 这是容易从下面的表达式

$$f_1(r)=\sum_{u_n>0}u_n r^n,\quad -f_2(r)=\sum_{u_n<0}u_n r^n,\quad f(r)=f_1(r)-f_2(r)$$

明白的. 那末 $|C,\alpha|(\alpha>0)$是否包含 $|A|$?

定理 2 当 $\alpha\geqslant 0$ 时,蔡查罗絕对平均法$|C,\alpha|$含有阿培耳的絕对求和法.

【証明】 設級数 $\sum u_n$ 的 α 級第 n 蔡查罗平均是 σ_n^α, 数列$\{n u_n\}$的 α 級第 n 蔡查罗平均是 τ_n^α, 那末 $\tau_n^\alpha=n(\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha)$. 置

$$f(r)=\sum u_n r^n,$$

則 $f'(r)=\sum n u_n r^{n-1}$. 当 $\alpha>0$ 时,

$$f'(r)=(1-r)^\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_n^\alpha}{n}n(\alpha)_n r^{n-1}.$$

从而

$$\int_0^1 |f'(r)|\,dr \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\tau_n^\alpha}{n}\right|(\alpha)_n\alpha\int_0^1(1-r)^{\alpha-1}r^n\,dr$$

$$=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\tau_n^\alpha}{n}\right|(\alpha)_n B(\alpha,\ n+1)=\sum_{n=1}^{\infty}|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|<\infty.$$

証明完毕.

另一方面，存在发散的有界級数 $\sum_{n=0}^{\infty}C_n$，它可用任一正阶 ε 的求和法 $|C,\ \varepsilon|$ 求和(数学学报 3, 1953). 設

$$C_{m!}=1,\ C_{m!+1}=-1\quad(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots);$$

$$C_n=0\quad(n\neq m!,\ n\neq m!+1,\ m=0,\ 1,\ \cdots).$$

我們不妨假設 $\varepsilon<1$*). 写着

$$\tau_n^\varepsilon=\frac{1}{(\varepsilon)_n}\sum_{\nu=0}^{n}(\varepsilon-1)_{n-\nu}\,\nu C_\nu=\tau_n'+\tau_n'',$$

$$\tau_n'=\frac{1}{(\varepsilon)_n}\sum_{\nu=0}^{[n/2]}(\varepsilon-1)_{n-\nu}\,\nu C_\nu.$$

当 τ_n' 中的 $\nu=m!$ 时，

$$(\varepsilon-1)_{n-\nu}\,\nu C_\nu+(\varepsilon-1)_{n-\nu-1}(\nu+1)C_{\nu+1}$$

$$=\nu(\varepsilon-1)_{n-\nu}-(\nu+1)(\varepsilon-1)_{n-\nu-1}$$

$$=(\varepsilon-1)_{n-\nu-1}\left(\frac{\nu(\varepsilon-1)}{n-\nu}-1\right)=O(n^{\varepsilon-1}).$$

适合 $m!<n$ 的 m 的个数是 $O(\log n)$. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\tau_n'|}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\varepsilon)_n}O(n^{\varepsilon-1}\log n)=\sum_{n=1}^{\infty}O\left(\frac{\log n}{n^2}\right)<\infty.$$

在区間 $\left(\frac{n}{2},\ n\right)$ 中，至多只有一个 $m!$，因此，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\tau_n''|}{n}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!(\varepsilon)_{m!}}m!C_{m!}+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m!<n<2m!}O((n-m!)^{\varepsilon-2}m!)\frac{1}{n(\varepsilon)_n}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m!}{m!(\varepsilon)_{m!}}+\sum_{m=0}^{\infty}O\left(\frac{1}{m!}\right)^\varepsilon<\infty.$$

---

*) 事实上，$\sum u_n=S(|C,\varepsilon|)$ 的話，$\sum u_n=S(|C,\eta|)\ (\eta>\varepsilon)$. 这是戈格貝脫良茲(E. Kogbetliantz)于 1925 年在法国数学会的公报上发表的定理，下文我們将有証明.

由是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\tau_n^{\varepsilon}|}{n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\tau'_n|}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\tau''_n|}{n}<\infty.$$

这就証明了 $\sum c_n$ 的 $|C, \varepsilon|$ 可求和性. 但是, $\sum c_n$ 虽然有界, 它并不收斂.

另一方面,存在着 $|A|$ 法可求和的級数,不可以用任一 $|C, \alpha|$ 平均法求它的和.

2. 求和法 $|C, \alpha|$

上面我們証明在 $f(\theta)$ 的狄尼点或是普拉沙特点——$\varphi_\theta(t)t^{-1}\in L(0, \pi)$ 或是 $t^{-2}\int_0^t\varphi_\theta(u)\,du\in L(0, \pi)$, $\mathfrak{S}[f; \theta]=f(\theta)(|A|)$. 現在研究: 假如 θ 是 f 的狄尼点或是普拉沙特点, 能否获得更强的求和結果? 首先証明

定理 1 設函数

$$\chi(t)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^t\varphi_\theta(u)u^{-1}\,du=\int_{+0}^t\varphi_\theta(u)u^{-1}\,du$$

是柯西的主值积分,則当 $t^{-1}\chi(t)\in L(0,\pi)$ 时, $\mathfrak{S}[f; \theta]=f(\theta)(|C, \alpha|)$, 但 $\alpha>2$*).

【証明】 对于 $\phi_\theta(t)\equiv\phi(t)=f(\theta+t)+f(\theta-t)$——固定 θ, 我們引入平均值函数的概念:我們称

$$[\phi(t)]_\alpha=\alpha t^{-\alpha}\int_0^t(t-u)^{\alpha-1}\phi(u)\,du$$

为 $\phi(t)$ 的 α 次平均值,我們将証如下的

引理 1 当 $t^{-1}\chi(t)\in L(0, \pi)$ 时, $[\phi(t)]_2$ 在 $[0,\pi]$ 上是有界变差.

要証明这个引理,首先从 $l(t)\in L(0, \pi)$ 导出

$$t^{-3}\int_0^t\int_0^u vl(v)\,dv\,du\in L(0, \pi).$$

我們不妨假設 $l(t)\geqslant0$. 在第一章中,我們証明过: 狄尼点是一个伐賴普山点,从而函数

*) 詳見 Amer. J. of Math. 67 (1945).

$$L(t)=\frac{1}{t}\int_0^t u\,l(u)\,du$$

在$(0, \pi)$上是有界变差，极限 $L(+0)$是存在的. 由分部积分法，

$$\int_0^\pi l(t)\,dt=L(\pi)-L(0)+\int_0^\pi \frac{1}{t^2}\int_0^t u\,l(u)\,du\,dt,$$

从而 $t^{-2}\int_0^t u\,l(u)\,du\in L(0, \pi)$. 利用这个結果，

$$t^{-3}\int_0^t 1\cdot\int_0^u vl(v)dv\,du=t^{-2}\int_0^t vl(v)\,dv-t^{-3}\int_0^t u^2\,l(u)\,du$$
$$\leqslant t^{-2}\int_0^t v\,l(v)\,dv\in L(0, \pi).$$

現在

$$[\phi(t)]_2=\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^u v\cdot\phi(v)v^{-1}\,dv\,du$$
$$=\frac{2}{t^2}\int_0^t u\,\chi(u)\,du-\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^u \chi(v)\,dv\,du$$
$$=\frac{2}{t}\int_0^t \chi(u)\,du-\frac{4}{t^2}\int_0^t\int_0^u \chi(v)\,dv\,du,$$

从而

$$\frac{d}{dt}[\phi(t)]_2=\frac{2}{t}\chi(t)-\frac{6}{t^2}\int_0^t \chi(u)\,du+\frac{8}{t^3}\int_0^t\int_0^u \chi(v)\,dv\,du,$$

由假設 $t^{-1}\chi(t)\in L(0, \pi)$，这包含着 $t^{-2}\int_0^t \chi(u)\,du\in L(0, \pi)$ 和

$$t^{-3}\int_0^t\int_0^u \chi(v)\,dv\,du\in L(0, \pi).$$

因此 $\frac{d}{dt}[\phi(t)]_2\in L(0, \pi)$. 这就証明了引理 1.

結合引理 1 和下文将証的波山桂 (L. S. Bosanquet) 的定理 [§6 定理 1]：

$$\int_0^\pi\left|\frac{d}{dt}[\phi(t)]_\alpha\right|dt<\infty \text{ 含有 } \mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)(|C, \alpha+\varepsilon|)\quad(\varepsilon>0),$$

就获得定理 1 的証明.

但是，不通过波山桂的一般定理，我們也能直接証明定理 1. 首先建立

引理 2 設 $a<1,\ b>1,\ h(t)\geqslant 0\ (t>0)$，則当 $t^{-1}h(t)\in L(0,\ 1)$ 时，两个級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}\int_0^{\frac{1}{n}} t^{-a}\, h(t)\,dt \quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-b}\int_{\frac{1}{n}}^{1} t^{-b}\, h(t)\,dt$$

都收斂.

我們将此两級数的第 n 項順次記做 u_n 和 v_n. 那末

$$u_n=\int_0^{\frac{1}{n}} \min\{(nt)^{-a},(nt)^{-b}\}\,h(t)\,dt,$$

$$v_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} \min\{(nt)^{-a},(nt)^{-b}\}\,h(t)\,dt.$$

写着 $H(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} t\min\{(nt)^{-a},(nt)^{-b}\}$，我們見到

$$\sum u_n\leqslant\int_0^1 H(t)t^{-1}\,h(t)\,dt,\ \sum v_n\leqslant\int_0^1 H(t)t^{-1}h(t)\,dt.$$

由于 $H(t)$ 等于

$$t^{1-a}\sum_{nt<1} n^{-a}+t^{1-b}\sum_{nt>1} n^{-b}$$

$$\leqslant\frac{t^{1-a}}{1-a}\left(\frac{1}{t}\right)^{1-a}+\frac{t^{1-b}}{b-1}\left(\frac{1}{t}\right)^{1-b}+2<\frac{3b}{(1-a)(b-1)},$$

所以

$$\sum(u_n+v_n)<\frac{6b}{(1-a)(b-1)}\int_0^1 t^{-1}\,h(t)\,dt<\infty.$$

这就証明了引理 2.

我們要从 $t^{-1}\chi(t)\in L(0,\ \pi)$ 导出 $\mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)\,(|C,\ 2+\varepsilon|)$ $(\varepsilon>0)$. 不妨假設 $\theta=0$. 設

$$\phi(t)\sim\sum a_n\cos nt,\quad \tau_n^{\alpha}=\frac{1}{(\alpha)_n}\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha-1)_{n-\nu}\,\nu a_\nu,$$

那末我們所要証明的是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\tau_n^{\alpha}|}{n}<\infty\,(\alpha>2)$. 不妨假設 $\alpha<3$ (参見 §1 的脚注)，从

$$n\,a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\,\frac{d}{dt}\,\sin nt\,dt,$$

得到

$$\tau_n^\alpha = \int_0^\pi \phi(t) \frac{d}{dt} g^\alpha(n, t)\, dt,$$

这里 $g^\alpha(n, t)$ 表示函数列 $\frac{2}{\pi}\sin nt\ (n=0, 1, 2, \cdots)$ 的 α 級第 n 个蔡查罗平均. 我們知道: 当 $0<t<\pi$, $2<\alpha<3$ 时, 成立着

$$\left|\frac{d}{dt} g^\alpha(n, t)\right| \leqslant Cn(1+nt)^{-2},$$

$$\left|\frac{d^2}{dt^2} g^\alpha(n, t)\right| \leqslant Cn^2(1+nt)^{-\alpha}.$$

这是可以从 $\frac{1}{2}\pi(\alpha)_n g^\alpha(n, t)$ 的表达式 $\operatorname{Im}\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha-1)_{n-\nu}e^{i\nu t}$, 施行两次阿培耳变换后, 計算而得的. 由是

$$\tau_n^\alpha = [t\chi(t)(d/dt)g^\alpha(n, t)]_0^\pi - \int_0^\pi \chi(t)(d/dt)\{t(d/dt)\}g^\alpha(n, t)dt$$

$$= O(n^{-1}) + \int_0^\pi \chi(t) n O(1+nt)^{-2} dt + n^2\int_0^\pi t\chi(t) O(1+nt)^{-\alpha}\, dt,$$

$$\sum|\tau_n^\alpha/n| \leqslant K\sum_{n=1}^\infty n^{-2} + K\sum\int_0^{\frac{1}{n}}|\chi(t)|dt + K\sum n^{-2}\int_{\frac{1}{n}}^\pi t^{-2}|\chi(t)|dt$$

$$+K\sum n\int_0^{\frac{1}{n}} t|\chi(t)|dt + K\sum n^{1-\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^\pi t^{1-\alpha}|\chi(t)|dt.$$

由引理 2, 这些級数都是收斂的. 从而

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n = f(0)\,(|C, \alpha|).$$

証明完毕.

假如 θ 是 f 的一个狄尼点, 那末 $[\phi(t)]_1$ 是有界变差, 由上述波山桂的定理, 成立着

$$\mathfrak{S}[f;\theta] = f(\theta)\,(|C, \alpha|) \quad (\alpha>1).$$

另一方面, 定理 1 还可以拓广成如下的形式:

定理 2 假如函数 (固定一点 θ)

$$l(t) \equiv \frac{1}{t}\int_{+0}^{t}\frac{1}{t_{m-1}}\int_{+0}^{t_{m-1}}\frac{1}{t_{m-2}}\int_{+0}^{t_{m-2}}\cdots\frac{1}{t_1}\int_{+0}^{t_1}\frac{1}{t_0}\phi(t_0)dt_0\,dt_1\cdots dt_{m-1}$$

以累次——m 次——柯西积分存在, 并且 $l(t)\in L(0, \pi)$, 那末当

$\alpha>m+1$ 时, $\mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)(|C,\alpha|)$.

【証明】 首先留意: 对于上面的 $g^{\alpha}(n, t)$, 成立着如下的不等式:

$$\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^{\lambda} g^{\alpha}(n, t)\right| \leqslant C n^{\lambda}(1+nt)^{-\mu},$$

这里 $\mu=\min(\alpha, 1+\lambda)$, $0<t<\pi$, C 是与n, t 无关的常数, $\alpha>0$. 固定 α, 我們可以对于 λ 用数学归納法来証明的.

当 $\alpha>m+1$ 时,經过 m 次分部积分之后,得到

$$\begin{aligned}\tau_n^{\alpha}&=(-1)^m\int_0^{\pi} l(t)\,(t(d/dt))^{m+1} g^{\alpha}(n, t)dt+O\left(\frac{1}{n}\right)\\&=\int_0^{\pi} l(t) \sum_{\nu=1}^{m}(1+nt)^{-1-\nu}O\,(nt)^{\nu}\,dt\\&\quad+\int_0^{\pi} l(t)\,(1+nt)^{-\gamma}O(nt)^{m+1}\,dt+O\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

这里 $\gamma=(\alpha, m+2)$. 因此,存在如下的常数 K:

$$\begin{aligned}|\tau_n^{\alpha}/n|\leqslant K\sum_{\nu=1}^{m+1} n^{\nu-1}\int_0^{\frac{1}{n}} t^{\nu-1}|t\,l(t)|\,dt+Kn^{-2}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} t^{-2}|t\,l(t)|\,dt\\+Kn^{m-\gamma}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} t^{m-\gamma}|t\,l(t)|\,dt+O(n^{-2}).\end{aligned}$$

由定理 1 的証明中的引理 2, 以上式为一般項的級数是收斂的,因此 $\sum|\tau_n^{\alpha}/n|<\infty$. 証明完毕.

下述定理 3 是定理 2 与波山桂定理的一个联系.

定理 3 当定理 2 中的 $l(t)\in L(0, \pi)$时, 平均值函数 $[\phi(t)]_{m+1}$ 在$[0, \pi]$上是有界变差.

【証明】 簡写着

$$\phi(t)=\phi_0(t)\equiv\phi_0,\ \phi_{\nu}\equiv\phi_{\nu}(t)=\int_{+0}^{t}\phi_{\nu-1}(t)t^{-1}\,dt\quad(\nu>0),$$

那末

$$l(t)=t^{-1}\,\phi_m(t).$$

从

$$\begin{aligned}\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}[\phi(t)]_{m+1}&=\left(\int_0^t dt\right)^{m+1}\phi(t)=\left(\int_0^t dt\right)^{m}\left\{t\,\phi_1-\int_0^t\phi_1\,dt\right\}\\&=\left(\int_0^t dt\right)^{m} t\,\phi_1-\left(\int_0^t dt\right)^{m+1}\phi_1,\end{aligned}$$

我們导出

$$\frac{t^{m+1}[\phi(t)]_{m+1}}{(m+1)!}=t\left(\int_0^t dt\right)^m\phi_1-(m+1)\left(\int_0^t dt\right)^{m+1}\phi_1.$$

由是可知：上式左边是

$$t^m\left(\int_0^t dt\right)^1\phi_m,\quad t^{m-1}\left(\int_0^t dt\right)^2\phi_m,\quad\cdots,\quad\left(\int_0^t dt\right)^{m+1}\phi_m$$

的一次結合．从而 $[\phi(t)]_{m+1}$ 是

$$t^{-1}\int_0^t t\,l(t)dt,\quad t^{-2}\left(\int_0^t dt\right)^2 t\,l(t),\quad\cdots,\quad t^{-1-m}\left(\int_0^t dt\right)^{m+1}t\,l(t)$$

的一次結合．順次写着这些函数为

$$t\cdot h_1(t),\quad t\cdot h_2(t),\quad\cdots,\quad t\cdot h_{m+1}(t),$$

那末 $[\phi(t)]_{m+1}=c_1t\,h_1(t)+c_2t\,h_2(t)+\cdots+c_{m+1}t\,h_{m+1}(t)$．因此，

$$\frac{d}{dt}[\phi(t)]_{m+1}=c_1l(t)+k_1h_1(t)+\cdots+k_{m+1}h_{m+1}(t),$$

这里 c_ν，k_ν 都是常数．

由假設 $l(t)\in L(0,\pi)$，从此可証 $h_\nu(t)\in L(0,\pi)\ (\nu=1,2,\cdots)$．事实上，

$$h_\nu(t)=h_{\nu-1}(t)-t^{-1-\nu}\int_0^t u^\nu h_{\nu-2}(u)du.$$

当 $l(t)\geqslant 0$ 时，$h_\nu(t)\leqslant h_{\nu-1}(t)$．在引理1的証明中，我們指出

$$l(t)\in L(0,\pi)\ \text{含有}\ t^{-2}\int_0^t u\,l(u)du\in L(0,\pi).$$

从而一切 $h_\nu(t)$ 都属于 $L(0,\pi)$．因此，

$$\frac{d}{dt}[\phi(t)]_{m+1}\in L(0,\pi).$$

証明完毕．

假如 $\phi_0(t)\equiv\phi(t)=\frac{1}{2}\{f(\theta+t)+f(\theta-t)\}$ 在 $0\leqslant t\leqslant\pi$ 是有界变差，那末当 $\alpha>0$ 时 $\mathfrak{S}[f]$ 在 θ 是可以 $|C,\alpha|$ 求和的，这是波山桂的定理，詳述于下：

定理 4 当 $\phi(t)=\phi_\theta(t)$ 在 $[0,\pi]$ 上是有界变差时，成立着

$$\mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)(|C,\alpha|)\quad(\alpha>0),$$

这里的 α 不可以改为 0.

【証明】 設 $\phi(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nt$ (不妨假設 $A_0=0$), 那末

$$nA_n=\frac{2n}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\cos nt\,dt=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nt d\phi(t).$$

記 $\frac{2}{\pi}\sin nt$ $(n=0,1,\cdots)$的 α 阶第 n 蔡查罗平均为 $g^{\alpha}(n,t)$,

$$\tau_n^{\alpha}=-\int_0^{\pi}g^{\alpha}(n,t)d\phi(t),$$

我們要証 $\sum n^{-1}|\tau_n^{\alpha}|$ 当 $\alpha>0$ 时收斂. 我們假設 $\alpha<1$, 那末

$$|g^{\alpha}(n,t)|\leqslant\begin{cases}Ant & \left(0<t\leqslant\frac{1}{n}\right),\\ An^{-\alpha}t^{-\alpha} & \left(t>\frac{1}{n}\right).\end{cases}$$

置 $G(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}|g^{\alpha}(n,t)|$, 我們見到

$$\sum n^{-1}|\tau_n^{\alpha}|\leqslant\sum n^{-1}\int_0^{\pi}|g^{\alpha}(n,t)|\cdot|d\phi(t)|$$
$$\leqslant\int_0^{\pi}G(t)\,|d\phi(t)|.$$

現在 $G(t)=\sum_{n\leqslant t^{-1}}n^{-1}O(nt)+\sum_{n>\frac{1}{t}}n^{-1}O(n^{-\alpha}t^{-\alpha})=O(1)$, 所以上記的积分是一个有限数,从而 $\sum n^{-1}|\tau_n^{\alpha}|<\infty$.

級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}$ 的和 $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}-|t|\right)$ 在$[-\pi,\pi]$上是有界变差, 但是它在 $t=0$ 处, 并不絕对收斂——$|C,0|$. 定理証明完畢.

平均值函数$[\phi]_{\alpha}$的有界变差性与 $\mathfrak{S}[f;\theta]$的 $|C,\beta|$ 求和之間,存在着密切的关系;比方說,$\mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)(|C,0|)$含有$[\phi(t)]_{\alpha}$$(\alpha>1)$的有界变差的,詳細地說:

定理 5 假如 $\mathfrak{S}[f]$ 在点 θ 絕对收斂, 那末当 $\alpha>1$ 时, 平均值函数$[\phi(t)]_{\alpha}$在$[0,\pi]$上是有界变差. 但是 $[\phi(t)]_1$ 未必在$[0,\pi]$上成一有界变差函数,这就是說: 伐賴普山的收斂条件对于絕对收斂 ($|C,0|$ 可求和)并不是必要的.

【証明】 設 $1<\alpha<2$. 我們要証 $\frac{d}{dt}[\phi(t)]_\alpha\in L(0,\pi)$. 由于

$$[\phi(t)]_\alpha=\alpha\int_0^1(1-u)^{\alpha-1}\sum A_n\cos ntu\,du$$
$$=\sum A_n\,\alpha\int_0^1(1-u)^{\alpha-1}\cos ntu\,du,$$

所以,写着

$$c_\alpha(x)=\alpha\int_0^1(1-u)^{\alpha-1}\cos xu\,du,$$

我們得到 $[\phi(t)]'_\alpha=\sum A_n\,n\,c'_\alpha(nt)$. 这里我們假設 $\phi(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nt$.

当 $x>0$ 时,我們易証

$$|c'_\alpha(x)|\leqslant A\min(1,x^{-\alpha}),$$

因此,

$$\int_0^\pi|[\phi(t)]'_\alpha|\,dt=\int_0^\pi\left|\sum A_n\,n\,c'_\alpha(nt)\right|dt\leqslant\sum|A_n|\,n\int_0^\pi|c'_\alpha(nt)|\,dt$$
$$=\sum|A_n|\,n\left(\int_0^{\frac{1}{n}}O(1)dt+\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}O(n^{-\alpha}t^{-\alpha})dt<\infty.\right.$$

由是, $[\phi(t)]_\alpha$ $(\alpha>1)$在 $[0,\pi]$ 上是有界变差.

設 $\sum a_n$ 絕对收斂,整数列 $\{\lambda_m\}$ 是增加的,那末 $\phi(t)=\sum a_n\cos\lambda_n t$ 是一絕对收斂的級数. 在$(-\pi,\pi)$上,将奇函数

$$\frac{1}{|t|}\int_0^t\phi(u)\,du=\sum_1^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n}\,\frac{\sin\lambda_n t}{|t|}$$

展成正弦級数 $\sum b_n\sin nt$, 那末

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin nt\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{\lambda_m}\,\frac{\sin\lambda_m t}{t}\,dt$$
$$=\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{\lambda_m}\int_0^\pi\frac{\sin nt\sin\lambda_m t}{t}\,dt.$$

由是

$$b_{\lambda_m}=\frac{2}{\pi}\,\frac{a_m}{\lambda_m}\int_0^\pi\frac{\sin^2\lambda_m t}{t}\,dt+O\left(\frac{1}{\lambda_m}\right).$$

我們采取 $\{\lambda_m\}$ 使它具有下面几个条件:

$$\lambda_{m+1}\geqslant p\,\lambda_m\quad(p>1);$$

$$a_m \log \lambda_m \to \infty \quad (m \to \infty),$$

那末

$$b_{\lambda_m} \sim \frac{a_m}{\lambda_m} \log \lambda_m,$$

b_n 不是 $O\left(\frac{1}{n}\right)$. 因此 $[\phi(t)]_1$ 并不是有界变差. 証明完毕.

3. 富理埃級数的 $|C, \alpha|$ 普遍求和

王福春于 1942 年証有如下的定理(Duke Math. J. 第九卷, 567—572).

定理 1 設 $\mathfrak{S}[f]$ 的系数是 a_n, b_n $(n=1, 2, \cdots)$, 则当級数*)

$$\sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2+b_n^2)(\log n)^p \quad (p>1)$$

收斂时, $\mathfrak{S}[f; \theta]=f(\theta)(|C, \alpha|)$ 对于任一 $\alpha>\frac{1}{2}$, 几乎处处成立. 这里的 p 不可以改成 1, 条件 $\alpha>\frac{1}{2}$ 不可以加强成 $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

【証明】 記着

$$\tau_n^\alpha(\theta)=\frac{1}{(\alpha)_n} \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha-1)_{n-\nu} \nu (a_\nu \cos \nu\theta + b\nu \sin \nu\theta),$$

我們要証級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} n^{-1} |\tau_n^\alpha(\theta)| d\theta$ 当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时收斂.

由于, 存在与 n, N 无关的常数 K 适合

$$\int_0^{2\pi} |\tau_n^\alpha(\theta)| d\theta \leqslant K n^{-\alpha} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} [(\alpha-1)_{n-\nu}]^2 \nu^2 (a_\nu^2+b_\nu^2) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

当 $\frac{1}{2}<\alpha<1$ 时, 由斯梯林公式, 容易知道:

$$\sum_{n=\nu}^{N} [(\alpha-1)_{n-\nu}]^2 \frac{(\log n)^p}{n^{1+2\alpha}} = O\left(\frac{(\log \nu)^p}{\nu^2}\right).$$

所以

$$\sum_{n=2}^{N} n^{-1-\alpha} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} [(\alpha-1)_{n-\nu}]^2 \nu^2 (a_\nu^2+b_\nu^2) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

---

*) 普拉沙特于 1933 年在 J. L. M. S. 第 35 卷上, 証明: 級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta}{\log n (\log \log n)^p} \quad (p>1)$$

几乎处处可用 $|A|$ 法求和.

的平方小于或等于

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(\log n)^{p}}\cdot\sum_{n=2}^{N}\frac{(\log n)^{p}}{n^{1+2\alpha}}\sum_{\nu=1}^{n}[(\alpha-1)_{n-\nu}]^{2}\nu^{2}(a_{\nu}^{2}+b_{\nu}^{2})$$

$$\leqslant O(1)\sum_{\nu=1}^{N}\nu^{2}(a_{\nu}^{2}+b_{\nu}^{2})\sum_{n=\nu}^{N}[(\alpha-1)_{n-\nu}]^{2}\frac{(\log n)^{p}}{n^{1+2\alpha}}$$

$$=O(1)\sum_{\nu=1}^{N}(a_{\nu}^{2}+b_{\nu}^{2})(\log\nu)^{p}=O(1).$$

我們証明了級数 $\sum\frac{1}{n}\int_{0}^{2\pi}|\tau_{n}^{\alpha}(\theta)|d\theta\left(\frac{1}{2}<\alpha<1\right)$ 是收斂的. 因此,級数 $\sum n^{-1}|\tau_{n}^{\alpha}(\theta)|\left(\frac{1}{2}<\alpha<1\right)$ 几乎处处收斂，从而当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时，$\mathfrak{S}[f;\ \theta]=f(\theta)\,(|C,\ \alpha|)$ 几乎处处成立.

其次証明定理中的 p 不許加强到 1. 事实上,三角級数

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n\log n)^{-1}\cos 2^{n}\theta$$

滿足条件 $\sum(a_{n}^{2}+b_{n}^{2})\log n<\infty$. 但是，它不能用 $|C,\ \alpha|$ 法求和的点 θ，成一个正測度的点集. 要証明这个事实,首先建立下述

引理 設 $F_{n}(\theta)\in L(0,\ 2\pi)\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，当 $n>0$ 时,有正的常数 A 和 B 适合

$$0\leqslant F_{n}(\theta)\leqslant A\log_{3}n,$$

$$\int_{0}^{2\pi}F_{n}(\theta)d\theta\geqslant B\log_{3}n,$$

那末存在正測度的点集 E，在 E 上,有无数个 $F_{n}(\theta)$ 滿足

$$F_{n}(\theta)>\log_{4}n,$$

这里 $\log_{r}m=\log(\log_{r-1}m)$，$\log_{0}m=m$.

假如引理不是眞的,那末 $[0,\ 2\pi]$ 中存在測度为 2π 的点集 M，当 $\theta\in M$ 时，$F_{m}(\theta)\leqslant\log_{4}m\ \ (m\geqslant N(\theta))$. 設

$$M_{m}=(F_{m}(\theta)\leqslant\log_{4}m)M,\ \mathscr{E}_{m}=M_{m}M_{m+1}\cdots,$$

则 $\mathscr{E}_{m}\subseteq\mathscr{E}_{m+1}$. 設 $\delta>0$，$|\mathscr{E}_{k}|>2\pi-\delta$，则当 $m\geqslant k$ 时，

$$F_{m}(\theta)\leqslant\log_{4}m\quad(\theta\in\mathscr{E}_{k}),\ \int_{\mathscr{E}_{k}}F_{m}(\theta)d\theta\leqslant 2\pi\log_{4}m,$$

$$\int_{0}^{2\pi}F_{m}(\theta)d\theta\leqslant 2\pi\log_{4}m+\int_{C(\mathscr{E}_{k})}F_{m}(\theta)d\theta.$$

由是，当 $m>k$ 时，

$$B\log_3 m\leqslant 2\pi\log_4 m+A\delta\log_3 m.$$

取 δ 很小，m 很大的話，上式不能成立。因此，引理是眞的。

現在証明所設的級数不能用 $|C, \alpha|$ 法求和。我們假設 $\alpha\geqslant 1$，置

$$f_n(\theta)=\left|\sum_{\nu=2}^{(n)}(\alpha-1)_{n-2^\nu}\frac{2^\nu}{\nu\log\nu}\cos 2^\nu\theta\right|,$$

这里 (n) 表示 $\log n/\log 2$ 的整数部分。設 $\cos 2^\nu\theta$ 在 $[0, 2\pi]$ 中取正数的一切 θ 所成的点集为 e_ν，$E_n=\prod_{\nu=(n)-l}^{(n)}e_\nu$，那末

$$|E_n|=\pi 2^{-l},\quad \int_E \cos 2^{(n)-1}\theta\,d\theta=2^{\frac{3}{2}-l}.$$

現在

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}f_n(\theta)d\theta&\geqslant\int_{E_n}f_n(\theta)d\theta\\&\geqslant\int_{E_n}\left|\sum_{\nu=(n)-l}^{(n)}(\alpha-1)_{n-2^\nu}\frac{2^\nu}{\nu\log\nu}\cos 2^\nu\theta\right|d\theta\\&\quad-\int_{E_n}\left|\sum_{\nu=2}^{(n)-l-1}(\alpha-1)_{n-2^\nu}\frac{2^\nu}{\nu\log\nu}\cos 2^\nu\theta\right|d\theta.\end{aligned}$$

由于有正数 A 和 B 适合 $Bn^{\alpha-1}\leqslant(\alpha-1)_n\leqslant An^{\alpha-1}$，所以

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}f_n(\theta)d\theta\geqslant B(n-2^{(n)-1})^{\alpha-1}\frac{2^{(n)-1}}{\log n\log_2 n}\int_{E_n}\cos 2^{(n)-1}\theta\,d\theta\\-A|E_n|n^{\alpha-1}\sum_{\nu=2}^{(n)-l-1}\frac{2^\nu}{\nu\log\nu}.\end{aligned}$$

取 $l<\frac{1}{2}(n)$，那末

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=2}^{(n)-l-1}\frac{2^\nu}{\nu\log\nu}\leqslant\int_2^{(n)-l}\frac{2^u}{u\log u}du&=O\left(\frac{2^{(n)-l}}{((n)-l)\log((n)-l)}\right)\\&=O\left(\frac{n}{\log n\log_2 n}2^{-l}\right).\end{aligned}$$

将此結果代入上式，得到

$$\int_0^{2\pi}f_n(\theta)d\theta>2^{-l}\frac{n^\alpha}{\log n\log_2 n}(B-A2^{-l})\geqslant\frac{An^\alpha}{\log n\log_2 n}\quad(A>0).$$

由是，函数

$$F_m(\theta)=\sum_{n=2}^{m}\frac{f_n(\theta)}{n(\alpha)_n}$$

满足

$$\int_0^{2\pi}F_m(\theta)d\theta\geqslant A\sum_{n=m_1}^{m}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\int_0^{2\pi}f_n(\theta)d\theta>\sum_{n=m_1}^{m}\frac{A}{n\log n\log_2 n}\geqslant A\log_3 m.$$

另一方面，$F_n(\theta)\leqslant C\log_3 m$.

由引理，存在正測度的点集 E；在 E 上，級数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\alpha)_n}\left|\sum_{\nu=2}^{(n)}(\alpha-1)_{n-2^\nu}\frac{2^\nu}{\nu\log\nu}\cos 2^\nu\theta\right|$$

发散，这就是說：級数 $\sum_{n=2}^{\infty}(n\log n)^{-1}\cos 2^n\theta$ 在 E 上不能用 $|C, \alpha|$ 法求和，$\alpha\geqslant1$.

这里我們引用戈格貝脫良兹 (E. Kogbetliantz) 在法国杂志(数学科学公报(2)第 49 卷，1925)上一个定理：当 $\sum a_n$ 可用 $|C, \alpha|$ 法求和时，$\sum|a_n|n^{-\alpha}<\infty$. 从这个定理，我們断言：級数

$$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n^{1-\alpha}\cdot\log n\cdot\log\log n}\quad\left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$$

是不可以用 $|C,\alpha|\left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$ 法在正測度的点集上求和的；事实上，当三角級数在一正測度的点集上絕对收斂时，处处絕对收斂，从而系数級数要絕对收斂(这个事实，下文将有証明)。由于 $\sum(n\log n\log\log n)^{-1}=\infty$，所以級数

$$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{|\cos n\theta|}{n\log n\log\log n}$$

不可能在正測度的点集上收斂. 定理証毕.

設 $p\geqslant1$，写着

$$f_p(h)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(h+t)-f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}};$$

不难証明 $f_2(h)=O\left(\left(\log\frac{1}{|h|}\right)^{-p}\right)$ $(p>1)$含有 $\sum(a_n^2+b_n^2)(\log n)^p<\infty$，从而 $\mathfrak{S}[f;\theta]\doteq f(\theta)\,|C, \alpha|$ $(\alpha>1/2)$. 成立着如下的定理(見"科学年刊"第一卷，1954)：写着 $f(z)=\sum c_n z^n$，当

$$\int_0^1\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F'(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}d\rho<\infty\quad(p\geqslant1)$$

时，$\sum c_n e^{i\theta} \doteq F(e^{i\theta})|C, \alpha|$ $\left(\alpha > \frac{1}{p}\right)$. 利用这个結果，即可建立下述定理 2（見倫敦数学会期刊 (J. L. M. S.) 30 (1955)）.

定理 2 設 $2 \geqslant p \geqslant 1$，則当 $f_p(h)/h \in L(-\pi, \pi)$ 时，$\mathfrak{S}[f]$ 与其共軛級数 $\overline{\mathfrak{S}}[f]$ 用 $|C, \alpha|$ $\left(\alpha > \frac{1}{p}\right)$ 平均法几乎到处可以求和.

【証明】 設 a_n, b_n 是 $\mathfrak{S}[f]$ 的系数，置 $2c_0 = a_0$, $c_n = a_n - ib_n$ $(n > 0)$,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z = r\, e^{i\theta},$$

我們只要从 $f_p(h)/h \in L(-\pi, \pi)$ 导出

$$\int_0^1 M_p(\rho, F')\, d\rho < \infty$$

好了，这里

$$M_p(\rho, F') = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F'(\rho\, e^{i\theta})|^p\, d\theta\right]^{\frac{1}{p}}.$$

由于

$$F'(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t) e^{it}\, dt}{(e^{it} - \rho e^{i\theta})^2} = \frac{e^{-i\theta}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta+t) e^{it}\, dt}{(e^{it} - \rho)^2}$$
$$= \frac{1}{\pi}\, e^{-i\theta}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}}{(e^{it} - \rho)^2}\, \{f(\theta+t) - f(\theta)\}\, dt,$$

所以，应用敏高夫斯基不等式，

$$M_p(\rho, F') \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_p(t)\, \frac{dt}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2}.$$

写着

$$\int_0^{\pi} \frac{f_p(t)\, dt}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2} = \int_0^{1-r} + \int_{1-r}^{\pi} = P(\rho) + Q(\rho).$$

我們見到

$$P(\rho) \leqslant \int_0^{1-r} \frac{f_p(t)\, dt}{(1-\rho)^2}, \quad \int_0^r P(\rho)\, d\rho \leqslant \frac{1}{1-r}\int_0^{1-r} f_p(t)\, dt;$$

$$\int_0^r Q(\rho)\, d\rho \leqslant \int_{1-r}^{\pi} f_p(t)\, dt \int_0^1 \frac{d\rho}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2} = \int_{1-r}^{\pi} f_p(t)\, \frac{\pi - t}{2\sin t}\, dt.$$

因此，$\int_0^r [P(\rho) + Q(\rho)]\, d\rho$ 小于或等于

$$\int_0^{1-r}\frac{f_p(t)}{t}dt+\int_{1-r}^{\pi}f_p(t)\frac{\pi-t}{2\sin t}dt\leqslant\int_0^{1-r}\frac{f_p(t)}{t}dt+\frac{\pi^2}{4}\int_{1-r}^{\pi}\frac{f_p(t)}{t}dt.$$

从而

$$\int_0^r d\rho\int_0^\pi\frac{f_p(t)dt}{1-2\rho\cos t+\rho^2}\leqslant\frac{\pi^2}{4}\int_0^\pi\frac{f_p(t)}{t}dt,$$

对于积分 $\int_{-\pi}^0 f_p(t)[1-2\rho\cos t+\rho^2]^{-1}dt$，可得类似的結果. 总結起来，我們得到

$$\int_0^r M_p(\rho, F')\,d\rho\leqslant\frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi}f_p(t)\,|t|^{-1}\,dt<\infty.$$

定理 2 証明完毕.

定理 2 中的条件不足以保障 $\mathfrak{S}[f]$ 和 $\bar{\mathfrak{S}}[f]$ 的几乎处处可用 $\left|C,\frac{1}{p}\right|$ 法求和. 对于后者的成立，有如下的充分条件（見倫敦数学会期刊, 30(1955)）：

$$f_p(h)=O\left\{\left(\log\frac{1}{|h|}\right)^{-q}\right\}\quad\left(q>1+\frac{1}{p},\ 1\leqslant p\leqslant 2\right).$$

他又指出：假如上式对于某一 $q>\frac{3}{2}$ 均匀地成立，那末 $\mathfrak{S}[f]$ 和 $\bar{\mathfrak{S}}[f]$ 处处可用 $\left|C,\frac{1}{2}\right|$ 求和法求和.

定理 1 是从 $\mathfrak{S}[f]$ 的系数的性质导出 $\mathfrak{S}[f]$ 的几乎处处用 $|C|$ 平均法可以求和的結論. 下面是从系数的某些特殊性质，导出 $|C, 0|$ 求和的一个定理.

定理 3 假如 $a_{n+1}/a_n=O(1)$，那末当 $\sum a_n\cos n\theta$ 或 $\sum a_n\sin n\theta$ 具有一个 $|C, 0|$ 点时，$\sum|a_n|<\infty$.

在特殊情况：$|a_1|\geqslant|a_2|\geqslant\cdots$，定理 3 是法都(P. Fatou)于1913年在法国杂志上发表的，此时証明极为簡单. 設 $0<\theta_0<\pi$，則

$$\sum|a_n|\cos^2 n\theta_0<\infty,$$

从而 $\sum|a_n|(1+\cos 2n\theta_0)<\infty$；由是得到 $\sum|a_n|<\infty$. 同样的方法对于正弦級数也有效.

定理 3 是沙思 (O. Szász) 于 1946 年在 (美国)数学年刊(Ann. of Math.) 第 47 卷上发表的.

【定理 3 的証明】 从 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=O(1)$，得到不等式

$$\rho_{n+1}<c\,\rho_n,$$

这里 $c>1$, $\rho_n=|a_n|$. 設 $0<\theta_0<\pi$, $\sum\rho_n|\cos n\theta_0|<\infty$, 則因

$$\begin{aligned}c\,\rho_{n-1}|\cos(n-1)\theta_0|+c\,\rho_n|\cos n\theta_0|&>\rho_n|\cos(n-1)\theta_0|+c\,\rho_n|\cos n\theta_0|\\&>\rho_n\{\cos^2(n-1)\theta_0+\cos^2 n\theta_0\}=\rho_n\{1+\cos\theta_0\cos(2n-1)\theta_0\}\\&\geqslant\rho_n(1-|\cos\theta_0|),\end{aligned}$$

所以

$$\sum\rho_n<\frac{c}{1-|\cos\theta_0|}\{\sum\rho_{n-1}|\cos(n-1)\theta_0|+\sum\rho_n|\cos n\theta_0|\}<\infty.$$

对于正弦級数，由于

$$\begin{aligned}c\,\rho_{n-1}|\sin(n-1)\theta_0|+c\,\rho_n|\sin n\theta_0|&>\rho_n\{\sin^2(n-1)\theta_0+\sin^2 n\theta_0\}\\&=\rho_n\{1-\cos\theta_0\cos(2n-1)\theta_0\}>\rho_n(1-|\cos\theta_0|),\end{aligned}$$

所以 $\sum\rho_n<\infty$. 証明完毕.

条件 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=O(1)$ 含有 $a_n\neq0$ $(n=1, 2, \cdots)$，从而对于(比方說)零系数特別多的級数

$$\sum a_n\cos 2^n\theta$$

而言，尽管滿足 $a_{n+1}/a_n=O(1)$，我們未便断言 $\sum|a_n\cos 2^n\theta_0|<\infty$ 含有 $\sum|a_n|<\infty$. 但是，沙思証得如下的結果：

定理 4 設 $\rho_n>0$, 則当 $\rho_{n+1}/\rho_n=O(1)$ 时，級数 $\sum\rho_n\cos 2^n\theta$ 只要有一个絕对收斂点，它就处处絕对收斂.

【証明】 簡写 $\cos 2^n x=c_n$, 那末

$$c_{n+1}=2c_n^2-1,\quad c_{n+1}^2+4c_n^2=1+4c_n^4\geqslant1.$$

从而

$$|c_n|+|c_{n+1}|\geqslant c_n^2+c_{n+1}^2\geqslant\frac{1}{4}.$$

用定理 3 的証法可以完成定理 4 的証明.

4. 三角級数的絕对收斂

假如 $\mathfrak{S}[f]$ 和 $\tilde{\mathfrak{S}}[f]$ 有一个共通絕对收斂点，那末 $\sum(|a_n|+|b_n|)$

收斂. 事实上,当

$$\sum c_n e^{in\theta}$$

有一个絕对收斂点时，$\sum|c_n|<\infty$. 但是,当 $\mathfrak{S}[f]$ 在 $[0, 2\pi]$ 中的絕对收斂点集 E 是一无限点集时，我們还不能断定 $\mathfrak{S}[f]$ 的系数 a_n, b_n 成一絕对收斂級数,例如 $\sum \sin(n!\,\theta)$ 在 $\theta=r\pi$(r: 有理数) 处絕对收斂，这些点 $r\pi$ 的全体在 $(-\pi, \pi)$ 中是到处稠密的，級数 $\sum \sin(n!\,\theta)$ 并不处处收斂,更說不上絕对收斂. 我們自然要問: E 滿足怎样条件时,在 E 上絕对收斂的三角級数,必然地到处絕对收斂呢? 当若阿 (Denjoy) 和卢金(Лузин)的下述定理,对于这个疑問,有所指示.

定理 1 在一个正测度点集上絕对收斂的三角級数，处处絕对收斂.

【証明】 我們将一般的三角級数写成如下的形式:

$$\rho_0+\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n \sin(n\theta+\varphi_n) \quad (\rho_n\geqslant 0, n>0).$$

由假設以及爱戈洛夫的定理，級数在某一正测度的点集 E 上，均匀地絕对收斂. 这包含着 $\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n \sin^2(n\theta+\varphi_n)$ 在 E 的均匀收斂于一个可积函数 $g(\theta)$:

$$\begin{aligned}\int_E g(\theta)d\theta&=\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n\int_E \sin^2(n\theta+\varphi_n)d\theta\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n\int_E\{1-\cos 2\varphi_n\cos 2n\theta+\sin 2\varphi_n \sin 2n\theta\}d\theta\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n(|E|+o(1)).\end{aligned}$$

由于 $|E|>0$, 所以 $\sum\rho_n<\infty$. 証明完毕.

当 $\{\rho_n\}$ 具有特殊性质时，$\sum\rho_n\sin(n\theta+\varphi_n)$ 在两点絕对收斂，就到处絕对收斂. 例如:

定理 2 假如正数数列 $\{\rho_n\}$ 是有界变差，$\rho_n=o(1)$，那末当 $\sum\rho_n\sin(n\theta+\varphi_n)$ 存在如下的两个絕对收斂点 $\theta_1,\theta_2, 0<\theta_1-\theta_2<\pi$ 时,

$$\sum\rho_n<\infty.$$

【証明】 置 $\theta_1-\theta_2=v$, 那末从 $nv=(n\theta_1+\varphi_n)-(n\theta_2+\varphi_n)$ 得到

$$|\sin nv| \leqslant |\sin(n\theta_1+\varphi_n)|+|\sin(n\theta_2+\varphi_n)|.$$

又从

$$\sum \rho_n |\sin nv| \leqslant \sum \rho_n |\sin(n\theta_1+\varphi_n)|+\sum \rho_n |\sin(n\theta_2+\varphi_n)|.$$

知 $\sum \rho_n |\sin nv|$ 收斂. 因此,存在如下的常数 K:

$$K>2\sum_{n=1}^{m}\rho_n \sin^2 nv=\sum_{n=1}^{m}\rho_n(1-\cos 2nv).$$

但是从

$$\frac{1}{2}\rho_0+\sum_{n=1}^{m}\rho_n \cos nv=\sum_{n=0}^{m-1}\Delta\rho_n \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)2v}{2\sin\frac{2v}{2}}+\rho_m\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)2v}{2\sin\frac{2v}{2}},$$

我們見到

$$\left|\frac{1}{2}\rho_0+\sum_{n=1}^{m}\rho_n \cos 2nv\right| \leqslant \frac{1}{2\sin v}\left[\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta\rho_n|+\max \rho_n\right]=K'.$$

从而

$$\frac{1}{2}\rho_0+\sum_{n=1}^{m}\rho_n<K+K', \quad \frac{1}{2}\rho_0+\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n\leqslant K+K'.$$

証明完毕.

定理 1 和定理 2 都沒有解决本节所提出的問題. 对于这个难題, 下述定理 3 比較回答得深刻一些.

定理 3 假如三角級数在一个第二类型的点集 (可能是零集) 上絕对收斂,那末到处絕对收斂.

【証明】 設适合 $\sum\rho_n|\sin(n\theta+\varphi_n)|<\infty$ 的一切点所成之集是 E, E 的余集 $C(E)$ 不是空的. 固定正整数 k, E_k 是如下的点集:当 $\theta\in E_k$ 时,必有 m 使

$$\sum_{n=1}^{m}\rho_n|\sin(n\theta+\varphi_n)|>k.$$

左边是 θ 的連續函数,从而 E_k 是一个开集,我們見到 $C(E)=\prod_{k=1}^{\infty}E_k$,

$$E=\sum_{k=1}^{\infty}C(E_k).$$

任一 $C(E_k)$ 不能含有区間; 否則的話, $|E|>0$, 由定理 1, $C(E)=0$,

这是矛盾.因此，E 是可列无限个疏朗点集的和集，乃是第一类型的点集. 这就証明了定理 3.

定理 4 当三角級数在某一有限区間中存在无数个絕对收斂点时，假如它在一个正测度点集上收斂，那末这个三角級数几乎处处收斂.

【証明】 設

$$A_n(\theta)=a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta,\quad B_n(\theta)=a_n\sin n\theta-b_n\cos n\theta,$$

则

$$A_n(\theta+h)+A_n(\theta-h)=2A_n(\theta)\cos nh,$$
$$B_n(\theta+h)-B_n(\theta-h)=2A_n(\theta)\sin nh.$$

假如 θ 是 $\sum A_n(\theta)$ 的一个絕对收斂点，则当 $\sum A_n(\theta\pm h)$（絕对）收斂时，由第一个等式，知 $\sum A_n(\theta\mp h)$（絕对）收斂；当 $\sum B_n(\theta\pm h)$（絕对）收斂时，由第二个等式，$\sum B_n(\theta\mp h)$（絕对）收斂. 由是可知：$\sum A_n(\theta)$ 的絕对收斂点集 E_A，收斂点集 E_C，$\sum B_n(\theta)$ 的絕对收斂点集 $\overline{E}_A$，收斂点集 $\overline{E}_C$ 关于 E_A 的任一点都是对称的.

由 E_A 关于 E_A 中任一点的对称性，当 θ 和 $\theta+h$ 都属于 E_A 时，$\theta,\ \theta+h,\ \theta+2h,\ \cdots$都属于 A. 假如 $[0,\ 2\pi]$ 中有无数个点属于 A，那末对于适当的 $\theta\in E_A$，可取 h 很小，使 $\theta+nh\in E_A\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，由是可知 E_A 是处处稠密的. 假如

$$|E_C|>0\quad 和\quad |C(E_C)|>0$$

同时成立，那末 E_C 和 $C(E_C)$必有密度点 θ 和 θ'. 取正数 ε 足够地小，使 $I=[\theta-\varepsilon,\ \theta+\varepsilon]$与区間 J 无共通点，并且 $\theta'\in J$，$|J|=2\varepsilon$，

$$|I\cdot E_C|>\varepsilon,\quad |J\cdot C(E_C)|>\varepsilon.$$

于 I 和 J 之間，取 E_A 的一点 θ_0，$\theta_0\overline{\in} I+J$，使 θ_0 与$(C,\ C')$的中点的距离小于 $\frac{\varepsilon}{2}$，那末 I 关于 θ_0 的对称区間 J 中就有 θ'，从而$|J\cdot E_C|>\varepsilon$. 但两个不等式

$$|JE_C|>\varepsilon\quad 和\quad |JC(E_C)|>\varepsilon$$

是不能并立的($|J|=2\varepsilon$). 因此，

$$|E_C|\cdot|C(E_C)|=0.$$

由于 $|E_C|>0$，所以 $|C(E_C)|=0$. 証明完毕.

系 当 E_A 成一无限点集时，$|\bar{E}_C|\cdot|C(\bar{E}_C)|=0$.

关于富理埃級数的絕对收斂，有值得留意的貝恩斯坦 (С. Бернштейн) 的定理，詳述于下.

定理 5 当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时，$\mathrm{Lip}\,\alpha$ 中的函数 $f(\theta)$ 的 $\mathfrak{S}[f]$ 是絕对收斂的.

这里以及今后"絕对收斂"是"到处絕对收斂"的簡写——没有什么混杂不清之事的話.

【証明】 $\mathfrak{S}[f]$ 是收斂的. 設 $\mathfrak{S}[f]=\sum A_n(\theta)$，$\bar{\mathfrak{S}}[f]=\sum B_n(\theta)$，則

$$f(\theta+h)-f(\theta-h)=-2\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\theta)\sin nh,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(\theta+h)-f(\theta-h)]^2\,d\theta=4\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n^2\sin^2 nh,$$

这里 $\rho_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，$a_n$ 和 b_n 是 $\mathfrak{S}[f]$ 的系数. 写着

$$\omega(\delta)=\max_{\substack{|t|\leqslant\delta\\ -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi}}|f(\theta+t)-f(\theta)|,$$

我們从上面的等式得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n^2\sin^2\frac{\pi n}{2^{\nu+1}}\leqslant\frac{1}{2}\,[\omega(\pi/2^\nu)]^2.$$

当 $2^{\nu-1}<n\leqslant 2^\nu$ 时，$\sin^2\frac{\pi n}{2^{\nu+1}}\geqslant\sin^2\frac{\pi 2^{\nu-1}}{2^{\nu+1}}=\frac{1}{2}$；因此，从上式得到

$$\sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\rho_n^2\leqslant[\omega(2^{-\nu}\pi)]^2.$$

写着 $2^{\nu-1}=(\nu)$，从上式得到

$$\left(\sum_{(\nu)+1}^{2(\nu)}\rho_n\right)^2\leqslant\sum_{(\nu)+1}^{2(\nu)}1^2\cdot\sum_{(\nu)+1}^{2(\nu)}\rho_n^2\leqslant(\nu)[\omega(2^{-\nu}\pi)]^2.$$

因此

$$\sum_{n=2}^{\infty}\rho_n\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}2^{\frac{1}{2}\nu}\omega(2^{-\nu}\pi)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\leqslant\int_0^1 t^{-\frac{3}{2}}\omega(t)dt.$$

由于 $\omega(t)=O(t^\alpha)$，$\alpha>\frac{1}{2}$，积分是收斂的. 証明完毕.

当 $\alpha=\dfrac{1}{2}$ 时，$\mathfrak{S}[f]$ 不一定絕对收斂；下面将有概括性的討論.

定理 6 有界变差函数 $f\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(\alpha>0)$ 的話，$\mathfrak{S}[f]$ 絕对收斂.

【証明】 設 a_n, b_n 是 $\mathfrak{S}[f]$ 的系数，$\rho_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，我們利用定理 5 的証明中的等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n^2\sin^2 nh=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}[f(\theta+h)-f(\theta-h)]^2\,d\theta.$$

置 $\theta=x+\dfrac{(k-1)\pi}{N}+\dfrac{\pi}{2N}$，$h=\dfrac{\pi}{2N}$；那末上式右方变成

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[f\left(x+\frac{k\pi}{N}\right)-f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{N}\right)\right]^2dx.$$

施行演算 $\dfrac{1}{2N}\sum\limits_{k=1}^{2N}$，則得

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{2N}\left[f\left(x+\frac{k\pi}{N}\right)-f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{N}\right)\right]^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n^2\sin^2 nh.$$

积分号內的式子 $\leqslant\dfrac{1}{2N}\,\omega\left(\dfrac{\pi}{N}\right)\displaystyle\int_0^{2\pi}|df(x)|$，因此

$$\frac{1}{4N}\,\omega\left(\frac{\pi}{N}\right)\int_0^{2\pi}|df(x)|\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n^2\sin^2 nh\geqslant\sum_{n=\frac{N}{2}+1}^{N}\rho_n^2\sin^2 nh,$$

这里 $N=2^\nu$，$\sin^2 nh\geqslant\left[\dfrac{2}{\pi}\,nh\right]^2=\dfrac{n^2}{N^2}\left(\dfrac{N}{2}<n<N\right)$. 上式簡化为

$$\sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\rho_n^2\leqslant\frac{N^2}{4N}\,\frac{1}{(2^{\nu-1})^2}\,\omega\left(\frac{\pi}{N}\right)\int_0^{2\pi}|df(x)|=\frac{1}{N}\,\omega\left(\frac{\pi}{2^\nu}\right)\int_0^{2\pi}|df(x)|.$$

由于 $\sum\omega\left(\dfrac{\pi}{2^\nu}\right)=O\left(\sum\left(\dfrac{\pi}{2^\nu}\right)^\alpha\right)=O(1)$，所以 $\sum\rho_n^2<\infty$. 証明完毕.

定理中 $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ 的条件不可以除去[*]；事实上，不但有界变差的函数 f 的 $\mathfrak{S}[f]$ 不一定絕对收斂，全連續函数的富理埃級数也未必絕对收斂. 例如

$$f(\theta)\sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n\log n}$$

表示全連續函数，它并不絕对收斂——$\sum\dfrac{1}{n\log n}=\infty$. 至于它的全連

[*] 但是还可以減輕，見本章 § 10.

續性，可以从它的导級数 $\sum \frac{\cos n\theta}{\log n}$ 成一富理埃級数知道.

那末，全連續函数 $f(\theta)$，在怎样条件下，$\mathfrak{S}[f]$ 具有絕对收斂性?

定理 7 全連續函数 f 的导函数 f' 属于 L^p $(p>1)$时，$\mathfrak{S}[f]$ 絕对收斂.

【証明】 設 $\alpha=\frac{p-1}{p}$，則当 $h>0$ 时，

$$|f(\theta+h)-f(\theta)|\leqslant\int_\theta^{\theta+h}|f'(t)|dt\leqslant\left(\int_\theta^{\theta+h}|f'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}h^\alpha.$$

因此 $f\in \operatorname{Lip}\alpha$. 由定理 6，$\mathfrak{S}[f]$絕对收斂. 証明完毕.

現在将定理 5 拓广成如下的形式:

定理 8 設 $f\in \operatorname{Lip}\alpha$，則当 $\beta>\frac{2}{2\alpha+1}$ 时，級数 $\sum(|a_n|^\beta+|b_n|^\beta)$ 收斂，这里 a_n, b_n 是 $\mathfrak{S}[f]$ 的系数.

【証明】 由于 $\frac{2}{2\alpha+1}<2$，我們不妨假設 $0<\beta<2$. 利用定理 5 的証明，我們得到不等式

$$\sum_{2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\rho_n^2\leqslant(\omega(\pi2^{-\nu}))^2.$$

由是

$$\sum\rho_n^\beta\leqslant\left(\sum\rho_n^2\right)^{\frac{1}{2}\beta}\left(\sum1\right)^{1-\frac{1}{2}\beta},$$

这里 $\sum$ 的上限与下限分别是 2^ν 和 $2^{\nu-1}+1$. 从而

$$\sum_{2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\beta_n^\beta\leqslant2^{\nu\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)}\omega^\beta(\pi2^{-\nu}).$$

关于 ν 相加，得到 $\sum_{n=2}^\infty\rho_n^\beta\leqslant\sum_{\nu=1}^\infty2^{\nu\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)}\omega^\beta(\pi2^{-\nu})$. 最后的因子是 $O[(\pi2^{-\nu})^\alpha]$，从而 $\sum\rho_n^\beta$ 小于

$$A\sum_{\nu=1}^\infty2^{\nu\left(\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)-\alpha\beta\right)}<\infty.$$

証明完毕.

結合定理 6 和定理 8 的証明，我們容易建立下述

定理 9 設有界变差的函数 $f\in \operatorname{Lip}\alpha$，則当 $\beta>\frac{2}{\alpha+2}$ 时，級数 $\sum(|a_n|^\beta+|\beta_n|^\beta)$ 收斂.

5. Lip 1/2 中的函数以及其他边緣情况

本节討論前节中的边緣性問題. 第一是 Lip $\frac{1}{2}$ 中的 f, 它的 $\mathfrak{S}[f]$ 是否絕对收斂; 第二要研究对于 Lip α 中的 f, 級数 $\sum(|a_n|^\beta+|b_n|^\beta)$ 当 $\beta=\dfrac{2}{2\alpha+1}$ 时的情况; 第三, 当有界变差函数 $f\in$ Lip α 时, 級数 $\sum(|a_n|^\beta+|b_n|^\beta)\left(\beta=\dfrac{2}{\alpha+2}\right)$ 是否收斂? 現在首先解答第一和第二两个問題.

定理 1 (i) Lip $\frac{1}{2}$ 中的函数 f 的 $\mathfrak{S}[f]$ 未必絕对收斂. (ii) 設

$$f(\theta)\sim\sum(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta).$$

当 $f\in$ Lip α 时, 級数 $\sum(|a_n|^\beta+|b_n|^\beta)\left(\beta=\dfrac{2}{2\alpha+1}\right)$ 可能发散.

这些結果, 可以从下述定理 2 得到.

定理 2 設 $0<\alpha<1$, $c>0$, 則級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{icn\log n}\,n^{-\frac{1}{2}-\alpha}e^{in\theta}$$

的和 $H_\alpha(\theta)$ 属于 Lip α.

对于这个一級数, 哈戴-立脫尔伍德曾加以深入研究, 其所得結果, 指示了富理埃級数理論中某些問題的解决方向. 例如 $H_{\frac{1}{2}}(\theta)$ 的系数級数并不絕对收斂. 在 $H_\alpha(\theta)$ 的情况, 由于 $(2\alpha+1)/(\alpha+2)<1$, 所以 $\sum(|a_n|^\beta+|b_n|^\beta)$ 当 $\beta=\dfrac{2}{2\alpha+1}$ 时发散.

【証明】 要証 $H_\alpha(\theta)\in$ Lip α, 我們需要几个引理. 簡写

$$F(u)=\exp(2\pi if(u)),\quad I(F)=I(F;\,a,\,b)=\int_a^b F(u)\,du,$$

$$S(F)=S(F;\,a,\,b)=\sum_{a<n\leqslant b}F(n),\quad D(F)=I(F)-S(F).$$

引理 1 在区間 $a\leqslant u\leqslant b$ 上, (i) 假如 $f(u)$ 具有单調导函数 $f'(u)\geqslant\lambda>0$, 那末

$$|I(F;\,a,\,b)|<\frac{1}{\lambda};$$

(ii) 假如 $f''(u)\geqslant\rho>0$, 那末 $|I(F;a,b)|\leqslant 4/\sqrt{\rho}$.

(这里的主要条件，显然地分别可以用 $f'(u)<-\lambda$ 和 $f''(u)\leqslant-\rho$ 来代.)

【証明】 (i) 由于 $I(F)$ 等于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{1}{f'(u)}dF(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{[\cos(2\pi f(u))+i\sin(2\pi f(u))]'du}{f'(u)}.$$

利用第二中值定理，我們見到

$$I(F)=\frac{1}{2\pi i}\max_{a<u<b}\frac{1}{f'(u)}\left[\int_{a'}^{b'}[\cos 2\pi f(u)]'du+i\int_{a''}^{b''}\sin[2\pi f(u)]'du\right],$$

这里 $a\leqslant a'<b'\leqslant b$, $a\leqslant a''<b''\leqslant b$. 因此 $|I(F)|\leqslant\frac{1}{2\pi\lambda}[2+2]<\frac{1}{\lambda}$.

(ii) 設 $a<x<b$, 則当 $f'(u)$ 在 $[a,b]$ 无零点时,

$$|f'(u)|\geqslant(x-a)\rho(x\leqslant u\leqslant b);$$

从而

$$|I(F)|\leqslant\left|\int_a^x\exp(2\pi if(u))du\right|+\left|\frac{1}{2\pi}\int_x^b\frac{dF(u)}{f'(u)}\right|$$
$$\leqslant(x-a)+\frac{1}{(x-a)\rho}.$$

从 x 的变动，我們获得 $|I(F)|\leqslant 2/\sqrt{\rho}$. 由于 $f'(u)$ 在 $[a,b]$ 中只能有一个零点 (或是沒有)，所以 $|I(F)|\leqslant 4/\sqrt{\rho}$. 証明完毕.

引理 2 假如 $f'(u)\,(a\leqslant u\leqslant b)$ 是一单調函数, $|f'(u)|\leqslant\frac{1}{2}$, 那末 $|D(F;a,b)|$ 小于一个絕对常数.

【証明】 我們利用公式 [van der Corput, 德国 Math. Ann. 84 (1921)]

$$D(F;a,b)=\int_a^b F(u)d\chi(u),\quad \chi(u)=u-[u]-\frac{1}{2},$$

来証明引理 2. 这里假設 $a>[a]$, $b>[b]$, 这个假設是不失定理 2 的一般性的：事实上，当 $a=[a]$ 或 $b=[b]$ 时, $D(F;a,b)$ 与 $D(F;a+\varepsilon,b-\varepsilon)\,(\varepsilon\to 0)$ 之差不超过 2.

显然, $\chi(u+1)\equiv\chi(u)$, $\mathfrak{S}[\chi]=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi ku}{k\pi}$. 将 $D(F)$ 施行分

部积分而得

$$\chi(u)F(u)\Big|_a^b-\int_a^b\chi(u)F'(u)du=R-I(\chi F';a,\ b),$$

这里 $|R|\leqslant1$. 因此，$D-R$ 等于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi ik}\left\{\int_a^b\frac{f'(u)}{f'(u)+k}\,de^{2\pi i(f(u)+ku)}-\int_a^b\frac{f'(u)}{f'(u)-k}\,de^{2\pi i(f(u)-ku)}\right\}.$$

函数 $f'(u)/(f'(u)\pm k)$ 是单調的，$|f'|\leqslant\frac{1}{2}$; 应用第二中值定理，上記級数第 k 項的絕对值小于 $\frac{2}{\pi k(k-1/2)}$，$|D-R|$ 小于一个絕对常数. 这就証明了引理 2.

引理 3 在 $[a,\ b]$ 上，假如 $f''(u)\geqslant\rho>0$ (或是 $f''\leqslant-\rho$)，那末

$$|S(F;\ a,\ b)|\leqslant(|f'(b)-f'(a)|+2)\left(\frac{4}{\sqrt{\rho}}+A\right).$$

【証明】 由于 $f''(u)>0$, 函数 $f'(u)+\frac{1}{2}$ 在 $a\leqslant u\leqslant b$ 上是单調增加的；設 $[a,\ b]$ 中，$f'(u)+\frac{1}{2}$ 取整数值的点为 $\alpha_r,\ \alpha_{r+1},\ \cdots,\ \alpha_{r+s}$,

$$f'(\alpha_p)+\frac{1}{2}=p\quad(p=r,\ \cdots,\ r+s).$$

置 $F_p(u)=\exp\{2\pi i(f(u)-pu)\}$，則 $S(F;\alpha_p,\alpha_{p+1})=S(F_p;\alpha_p,\alpha_{p+1})$. 后者等于

$$I(F_p;\ \alpha_p,\ \alpha_{p+1})-D(F_p;\ \alpha_p,\ \alpha_{p+1}).$$

由于 $|f'(u)-p|\leqslant\frac{1}{2}(\alpha_p\leqslant u\leqslant\alpha_{p+1})$，所以由引理 2，上式末項的絕对值小于一个絕对常数 A. 又由引理 1,

$$|I(F_p;\ \alpha_p,\ \alpha_{p+1})|\leqslant4\rho^{-\frac{1}{2}},$$

設 $\alpha_{r-1}=a$, $\alpha_{r+s+1}=b$, 則从 $S(F;\ a,\ b)=\sum_{r-1}^{r+s}S(F;\ \alpha_p,\ \alpha_{p+1})$，得到所要的結果:

$$\begin{aligned}|S(F;\ a,\ b)|&<4(s+2)[\rho^{-\frac{1}{2}}+A]\\&=4[\rho^{-\frac{1}{2}}+A]\cdot[f'(\alpha_{r+s})-f'(\alpha_r)+2].\end{aligned}$$

引理 4 設 $c>0$, 則当 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 时，均匀地，

$$S_N(\theta)=\sum_{n=1}^{N}e^{icn\log n}e^{in\theta}=O(\sqrt{N}).$$

【証明】 置 $f(u)=\dfrac{1}{2\pi}(cu\log u+u\theta)$，則 $f'(u)=c(1+\log u)+\theta$ 当 $u\geqslant 1$ 时，是正的．在区間 $[2^\nu,2^{\nu+1}]$ 上，$f''(u)\leqslant c2^{-\nu}$；由引理 3，

$$|S(F;2^\nu,2^{\nu+1})|\leqslant C\cdot 2^{\frac{\nu}{2}}\quad (C \text{ 只和 } c \text{ 有关系}).$$

由是，$2^n<N\leqslant 2^{n+1}$ 的話，从

$$|S_N(\theta)|\leqslant 1+|S(F;1,2)|+|S(F;2,4)|+\cdots+|S(F;2^n,N)|,$$

得到

$$|S_N(\theta)|\leqslant C\sum_{\nu=0}^{n}2^{\frac{\nu}{2}}=O(2^{\frac{n}{2}})=O(\sqrt{N}).$$

【定理 2 的証明】 級数 $H_\alpha(\theta)$ 的开始 n 項之和是

$$\sum_{m=1}^{n}e^{icm\log m}m^{-\frac{1}{2}-\alpha}e^{im\theta}=\sum_{m=1}^{n-1}S_m(\theta)\Delta m^{-\frac{1}{2}-\alpha}+S_n(\theta)n^{-\frac{1}{2}-\alpha}.$$

由引理 4，$S_m(\theta)=O(\sqrt{m})$，从而当 $0<\alpha<1$ 时，級数匀斂于 $H_\alpha(\theta)$．我們見到，$h>0$ 的話，

$$H_\alpha(\theta+h)-H_\alpha(\theta)=\sum_{m=1}^{[1/h]}+\sum_{[1/h]+1}^{\infty}\{S_m(\theta+h)-S_m(\theta)\}O(m^{-\frac{3}{2}-\alpha}).$$

第二部分是

$$O\Bigl(\sum_{[1/h]+1}^{\infty}\sqrt{m}\,m^{-\frac{3}{2}-\alpha}\Bigr)=O(h^\alpha).$$

对于第一部分的和，我們应用中値定理，存在如下的 θ'，$\theta<\theta'<\theta+h$，

$$S_m(\theta+h)-S_m(\theta)=h\,S'_m(\theta')=h\sum_{\nu=1}^{m}O(\sqrt{\nu})=h\,O(m^{\frac{3}{2}}).$$

从而

$$\sum_{m=1}^{[1/h]}\{S_m(\theta+h)-S_m(\theta)\}O(m^{-\frac{3}{2}-\alpha})=\sum_{m=1}^{[1/h]}hO(m^{-\alpha})=O(h^\alpha).$$

总結起来，$H_\alpha(\theta+h)-H_\alpha(\theta)=O(h^\alpha)$．証明完毕．

6．富理埃級数 $|C,\alpha|$ $(\alpha>0)$ 求和的充要条件

級数 $\mathfrak{S}[f]$ 在点 θ 的求和問題归結于 $\mathfrak{S}[\phi]$ 在 $t=0$ 的求和問題，

这里

$$\phi(t)=\frac{1}{2}\{f(\theta+t)+f(\theta-t)\}\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nt.$$

当$\alpha>0$时，写着

$$\Phi_\alpha(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-u)^{\alpha-1}\phi(u)du$$

称$\Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}\Phi_\alpha(t)=[\phi(t)]_\alpha$为$\phi(t)=\phi_0(t)$的$\alpha$阶的平均值（函数）. 記$S_n=S_n^0=a_0+\cdots+a_n$, $S'_n=S_0^0+\cdots+S_n^0$, 等等. 設σ_n^α是$\{S_n\}$的第$n(C,\alpha)$平均，τ_n^α是$\{na_n\}$的第$n(C,\alpha)$平均．当$\sum|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|<\infty$, $\sigma_n^\alpha\to S$时，

$$\mathfrak{S}[\phi, 0]=S|C, \alpha|.$$

这等价于

$$\mathfrak{S}[f, \theta]=S|C, \alpha|.$$

下面两个定理合成上式成立的充要条件，乃是波山桂(Proc. L. M. S. 第二輯第四十一卷，1936）的定理.

定理 1 假如函数$[\phi(t)]_\alpha$ $(\alpha>0,\ 0\leqslant t\leqslant\pi)$是有界变差，那末，当$\beta>\alpha$时，

$$\mathfrak{S}[f, \theta]=S|C, \beta|.$$

定理 2 假如上式成立，那末当$\alpha>\beta+1$时，$[\phi(t)]_\alpha$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$是有界变差.

总結起来：$\mathfrak{S}[f, \theta]=S|C|$的充要条件是某一$[\phi(t)]_\alpha$在$0\leqslant t\leqslant\pi$上是有界变差.

正数η尽管小，$[\phi(t)]_\alpha$ $(\alpha>0)$在区間$[0, \eta]$成有界变差函数时，它在$0\leqslant t\leqslant\pi$上也成有界变差函数．由是可知：关于富理埃級数的$|C, \alpha|$求和，当$\alpha>1$时，是函数的局部性质，就是說，$\mathfrak{S}[f]$在一定点θ是否可用$|C, \alpha|$ $(\alpha>1)$求和，只关系于f在θ附近的性质.

【定理1的証明】 我們要从$\int_0^\pi|d[\phi(t)]_\alpha|<\infty$导出$\sum n^{-1}|\tau_n^\beta|<\infty$，这里$\beta>\alpha$；但是我們不妨假設$\alpha<\beta<[\alpha]+1$（見下文定理5），現在

$$\tau_n^\beta=n(\sigma_n^\beta-\sigma_{n-1}^\beta)=\frac{1}{(\beta)_n}\sum_{\nu=0}^{n}(\beta-1)_{n-\nu}\,\nu a_\nu$$

$$=\frac{1}{(\beta)_n}\sum_{\nu=0}^{n}(\beta-1)_{n-\nu}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\phi(t)\frac{d}{dt}\sin\nu t\,dt\right]$$

$$=\int_0^\pi\phi(t)\frac{d}{dt}g^\beta(n,\,t)\,dt,$$

$$g^\beta(n,\,t)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{(\beta)_n}\sum_{\nu=0}^{n}(\beta-1)_{n-\nu}\sin\nu t.$$

关于 $g^\beta(n,\,t)$，我們能作出如下的估計式：

$$\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^k g^\beta(n,\,t)\right|\leqslant\begin{cases}An^k & (k\geqslant0),\\ An^{-1}t^{-1-k} & (0\leqslant k\leqslant\beta-1),\\ An^{k-\beta}t^{-\beta} & (k\geqslant\beta-1).\end{cases}$$

經过 $k=[\alpha]$ 次分部积分，我們得到：

$$\tau_n^\beta=\left[\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}\Phi_\nu(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^\nu g^\beta(n,\,t)\right]_0^\pi$$

$$+(-1)^k\int_0^\pi\Phi_k(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{k+1}g^\beta(n,\,t)\,dt.$$

右边第一項是 $O(n^{k-\beta})+O(n^{-1})$．記最后的积分为 I_n，則

$$\tau_n^\beta=I_n+O(n^{-1})+O(n^{k-\beta});$$

$$I_n=\int_0^\pi\Phi_k(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{k+1}g^\beta(n,\,t)\,dt$$

$$=\int_0^\pi\left(\frac{d}{dt}\right)^{k+1}g^\beta(n,\,t)\frac{1}{\Gamma(1+k-\alpha)}\int_0^t(t-u)^{k-\alpha}\,d\Phi_\alpha(u)\,dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+k-\alpha)}\int_0^\pi d\Phi_\alpha(u)\int_u^\pi(t-u)^{k-\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k+1}g^\beta(n,\,t)\,dt$$

$$=\int_0^\pi J(n,\,u)\,d\Phi_\alpha(u),$$

这里

$$J(n,\,u)=\frac{1}{\Gamma(1+k-\alpha)}\int_u^\pi(t-u)^{k-\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k+1}g^\beta(n,\,t)\,dt.$$

从而

$$I_n=\Big[\Phi_\alpha(u)J(n, u)\Big]_0^\pi-\int_0^\pi \Phi_\alpha(u)\frac{d}{du}J(n, u)du$$

$$=I_\alpha(\pi)\ J(n, \pi)-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\pi [\phi(u)]_\alpha u^\alpha\frac{d}{du}J(n, u)du.$$

記

$$V(n, u)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^u v^\alpha\frac{d}{dv}J(n, v)dv,$$

那末

$$I_n=\Phi_\alpha(\pi)J(n, \pi)-[\phi(\pi)]_\alpha V(n, \pi)+\int_0^\pi V(n, u)d[\phi(u)]_\alpha.$$

假如我們証得：当 $0<u<\pi$ 时，

$$|J(n, u)|\leqslant\begin{cases}An^\alpha,\\ An^{\alpha-\beta}u^{-\beta},\end{cases}$$

那末我們得到

$$\tau_n^\beta=O\left(\frac{1}{n}\right)+O(n^{k-\beta})+O(n^{\alpha-\beta})$$

$$+(-1)^{k+1}[\phi/\pi]_\alpha V(n, \pi)+(-1)^k\int_0^\pi V(n, u)d[\phi(u)]_\alpha.$$

特別当 $\phi(t)\equiv 1$ 时，$\tau_n^\beta=0$；从而

$$0=O\left(\frac{1}{n}\right)+O(n^{k-\beta})+O(n^{\alpha-\beta})+(-1)^{k+1}V(n, \pi),$$

$$V(n, \pi)=O(n^{\alpha-\beta})\quad(k\leqslant\alpha).$$

由是，当 $\beta>\alpha$ 时，

$$\tau_n^\beta=O(n^{\alpha-\beta})+(-1)^k\int_0^\pi V(n, u)d[\phi(u)]_\alpha.$$

由于 $\Gamma(\alpha+1)V(n, u)$ 等于

$$u^\alpha J(n, u)-\alpha\int_0^u v^{\alpha-1}J(n, v)dv=O(u^\alpha n^\alpha),$$

所以从等式

$$\Gamma(\alpha+1)\{V(n, \pi)-V(n, u)\}=[v^\alpha J(n, v)]_u^\pi-\alpha\int_u^\pi v^{\alpha-1}J(n, v)\,dv$$

又得到

$$-\Gamma(\alpha+1)V(n, u)=O(n^{\alpha-\beta})+O(n^{\alpha-\beta}u^{\alpha-\beta})+\int_u^\pi v^{\alpha-1}O(n^{\alpha-\beta}v^{-\beta})dv$$
$$=O(n^{\alpha-\beta}u^{\alpha-\beta}).$$

总結起来：$V(n, u)=O\{\min(n^\alpha u^\alpha,\ n^{\alpha-\beta}u^{\alpha-\beta})\}$. 由是，当 $0<u<\pi$ 时，均匀地成立着

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-1}|V(n, u)|\leqslant\sum_{n\leqslant u^{-1}}+\sum_{n>u^{-1}}=\sum_{n\leqslant u^{-1}}n^{-1}O(n^\alpha u^\alpha)+\sum_{n>u^{-1}}n^{-1}O(n^{\alpha-\beta}u^{\alpha-\beta})$$
$$=O(u^{-\alpha}u^\alpha)+O(u^{\beta-\alpha}u^{\alpha-\beta})=O(1).$$

从而

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-1}|\tau_n^\beta|$$
$$=O(\sum n^{-2})+O(\sum n^{-1-\beta+\alpha})+O\left(\sum n^{-1}\int_0^\pi|V(n, u)|\,|d[\phi(u)]_\alpha|\right)$$
$$=O(1)+O\left\{\int_0^\pi\sum n^{-1}|V(n, u)|\,|d[\phi(u)]_\alpha|\right\}$$
$$=O(1)+O\left(\int_0^\pi|d[\phi(u)]_\alpha|\right)=O(1).$$

这就証明了 $\sum|\sigma_n^\beta-\sigma_{n-1}^\beta|<\infty$.

我們还要証明 $J(n, u)$ 的絕对值小于 $A\min(n^\alpha,\ n^{\alpha-\beta}u^{-\beta})$. 記 $u'=\min(\pi,\ u+n^{-1})$，則

$$\Gamma(1+k-\alpha)J(n,u)=\int_u^{u'}+\int_{u'}^\pi(t-u)^{k-\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k+1}g^\beta(n,\ t)dt=J_1+J_2.$$

以 A 代表絕对常数，我們見到

$$|J_1|\leqslant A\int_u^{u'}(t-u)^{k-\alpha}\min(n^{k+1},\ n^{k+1}(nt)^{-\beta})dt$$
$$\leqslant A\min\{n^{k+1},\ n^{k+1}(nu)^{-\beta}\}\int_u^{u'}(t-u)^{k-\alpha}dt\leqslant A\min\{n^\alpha, n^\alpha(nu)^{-\beta}\},$$

当 $u'<\pi$ 时，由第二中值定理，$(u',\ \pi)$ 中有点 S 适合于

$$J_2=n^{\alpha-k}\int_{u'}^S\left(\frac{d}{dt}\right)^{1+k}g^\beta(n,\ t)dt=n^{\alpha-k}O\{\min(n^k,\ n^k(nu)^{-\beta})\}$$
$$=O\{\min(n^\alpha,\ n^\alpha(nu)^{-\beta})\}.$$

由是 $J(n,\ u)=O\{\min(n^\alpha,\ n^\alpha(nu)^{-\beta})\}$. 定理 1 証明完毕.

【定理 2 的証明】 当 $p>0$ 时，置

$$\gamma_\rho(x)=\int_0^1 (1-u)^{\rho-1}\cos xu du.$$

我們要从 $\mathfrak{S}[f, \theta]=S|C, \alpha|$ 导出

$$\int_0^\pi |d[\phi(t)]_{\alpha+1+\varepsilon}|<\infty \quad (\varepsilon>0).$$

置 $\alpha+1+\varepsilon=\beta$, $\frac{1}{\beta}[\phi(t)]_\beta$ 等于

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^\infty a_n\gamma_\beta(nt)&=\sum_{n=0}^\infty S_n^k\Delta^{k+1}\gamma_\beta(nt)\\&=\sum_{n=0}^\infty \Delta^{k+1}\gamma_\beta(nt)\sum_{\nu=0}^n (k-\alpha)_{n-\nu}S_\nu^{\alpha-1}\\&=\sum_{\nu=0}^\infty S_\nu^{\alpha-1}\sum_{n=\nu}^\infty (k-\alpha)_{n-\nu}\Delta^{k+1}\gamma_\beta(nt).\end{aligned}$$

記

$$J_\nu(t)=\sum_{n=\nu}^\infty (k-\alpha)_{n-\nu}\Delta^{k+1}\gamma_\beta(nt),\ V_\nu(t)=\sum_{n=\nu}^\infty (\alpha)_n\Delta J_n(t),$$

那末从上式得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta}[\phi(t)]_\beta&=\sum_{\nu=0}^\infty S_\nu^{\alpha-1}J_\nu(t)=\sum_{\nu=0}^\infty S_\nu^\alpha\Delta J_\nu(t)=\sum_{\nu=0}^\infty \sigma_\nu^\alpha\Delta V_\nu(t)\\&=\sum_{\nu=0}^\infty(\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu-1}^\alpha)V_\nu(t).\end{aligned}$$

但是这里計算的正确性依賴于还未詳明的事实. 首先是 $\gamma_\beta(x)$ 的性质:

$$|\gamma_\sigma^{(m)}(x)|\leqslant\begin{cases}A & (m\geqslant 0),\\ Ax^{-2-m} & (0\leqslant m\leqslant\sigma-2),\\ Ax^{-\sigma} & (m>\sigma-2),\end{cases}$$

下面将有詳細的証明, 参見霍勃松的«实变函数論» (E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable II 564—567). 我們假設

$$\alpha+1<\beta<[\alpha]+2,\quad k=[\alpha],$$

那末从 $S_n^k\Delta^k\gamma_\beta(nt)=O(n^k\cdot n^{-\beta})=O(n^{k-\beta})$, 知 $\sum a_n\gamma_\beta(nt)$ 可以变为 $\sum S_n^k\Delta^{k+1}\gamma_\beta(nt)$. 因之 $[\phi(t)]_\beta$ 可以写成上述的級数.

其次, 我們不妨假設 ε 是很小的, 换句話說, 从

$$\int_0^\pi |d[\phi(t)]_\beta|<\infty$$

可以导出 $\int_0^\pi |d[\phi(t)]_\delta|<\infty$ 当 $\delta>\beta$ 时成立．事实上，从

$$[\phi(t)]_\delta=\delta\, t^{-\delta}\int_0^t (t-v)^{\delta-\beta-1}\, v^\beta [\phi(v)]_\beta/\Gamma(\beta+1)\,dv$$

得到

$$\int_0^\pi |[\phi(t)]'_\delta|\,dt\leqslant\frac{\delta}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^\pi v^\beta\int_v^\pi t^{-\delta}(t-v)^{\delta-\beta-1}|[\phi(v)]'_\beta|\,dt\,dv$$

$$\leqslant\frac{\delta}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^\pi v^{\beta-\delta}|[\phi(v)]'_\beta|(\pi-v)^{\delta-\beta}/(\delta-\beta)\,dv$$

$$\leqslant\frac{\delta\pi^{\beta-\delta}}{(\delta-\beta)\Gamma(\beta+1)}\int_0^\pi |[\phi(v)]'_\beta|\,dv<\infty.$$

下面将証 $|V'_\nu(t)|\leqslant A\min(\nu^\alpha t^{\alpha-1},\ \nu^{1+\alpha-\beta}\, t^{\alpha-\beta})$．这个不等式保障等式

$$\beta^{-1}[\phi(t)]'_\beta=\sum(\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu-1}^\alpha)V'_\nu(t)$$

的成立，并且从不等式

$$\int_0^\pi |[\phi(t)]'_\beta|\,dt\leqslant\beta\sum|\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu-1}^\alpha|\int_0^\pi |V'_\nu(t)|\,dt$$

完成着定理 2 的証明．实际上，最后的积分小于

$$A\int_0^{\nu^{-1}} \nu^\alpha t^{\alpha-1}\,dt+A\int_{\nu^{-1}}^\pi \nu^{1+\alpha-\beta}\, t^{\alpha-\beta}\,dt<\frac{A}{\alpha}+\frac{A}{\beta-\alpha-1}.$$

为了要估計 $V'_\nu(t)$，首先証明 $|J'_m(t)|\leqslant A\min(t^{\alpha-1},\ m^{1-\beta}\, t^{\alpha-\beta})$．由于 $\beta>1$，所以当 $t\geqslant\varepsilon>0$ 时，从

$$\sum_{n=N}^{\infty}(k-\alpha-1)_{n-m}\Delta^k\frac{d}{dt}\gamma_\beta(nt)+(k-\alpha)_{N-m-1}\,\Delta^k\frac{d}{dt}\gamma_\beta(Nt)$$

$$=\sum_{n=N}^{\infty}O((n-m)^{k-\alpha-1}\, n^{-k-2})+O((N-m)^{k-\alpha}\cdot N^{-k-2})$$

知等式 $J'_m(t)=\sum_{n=m}^{\infty}(k-\alpha)_{n-m}\frac{d}{dt}\Delta^{k+1}\gamma_\beta(nt)$ 成立．設 $\left[\frac{1}{t}\right]=T$，则 $J'_m(t)$ 等于 $\Sigma_1+\Sigma_2$，这里

$$\Sigma_1=\sum_{n=m}^{m+T}(k-\alpha)_{n-m}\frac{d}{dt}\Delta^{k+1}\gamma_\beta(nt),$$

$$\Sigma_2=\sum_{n=m+T+1}^{\infty}(k-\alpha)_{n-m}\frac{d}{dt}\Delta^{k+1}\gamma_\beta(nt).$$

从恒等式

$$\Delta^p f(n)=\int_{n+1}^{n} dx_1\int_{x_1+1}^{x_1} dx_2\cdots\int_{x_{p-1}+1}^{x_{p-1}}\left(\frac{d}{dx_p}\right)^p f(x_p)dx_p$$

以及 $\gamma_\beta^{(\lambda)}(x)$ 的性质：它是 $O(x^{-\beta})(\lambda>\beta-2)$，也是 $O(x^{-\beta-2})(\lambda\leqslant\beta-2)$，我們見到

$$\left|\Delta^p\frac{d}{dt}\gamma_\beta(nt)\right|\leqslant\begin{cases}A n\,t^p & (p\geqslant 0),\\ A n^{-p-2}t^{-3} & (p\leqslant\beta-3),\\ A n^{2-\beta}t^{p-\beta} & (p>\beta-3).\end{cases}$$

由是

$$\begin{aligned}|\Sigma_1|&\leqslant A\sum_{n=m}^{m+T}(n-m+1)^{k-\alpha}\min(t^k,\ t^k(nt)^{1-\beta})\\&=O\{\min(t^{\alpha-1},\ t^{\alpha-1}(mt)^{1-\beta})\},\\|\Sigma_2|&\leqslant(k-\alpha)_{T+1}\max_{N>T}\left|\sum_{n=m+T+1}^{m+N}\Delta^{k+1}\frac{d}{dt}\gamma_\beta(nt)\right|\\&=O(t^{\alpha-k})\max_{N>T}\left|\Delta^k\frac{d}{dt}\gamma_\beta\{(m+T+1)t\}\right.\\&\qquad\left.-\Delta^k\frac{d}{dt}\gamma_\beta\{(m+N+1)t\}\right|\\&=O(t^{\alpha-1})\min(1,\ (mt)^{1-\beta}).\end{aligned}$$

相加得到 $J'_m(t)=O(t^{\alpha-1})\min\{1,\ (mt)^{1-\beta}\}$. 同样可証

$$J_m(t)=O(m^{-\beta}).$$

現在証明等式 $V'_m(t)=\sum_m^\infty(\alpha)_\nu\Delta J'_\nu(t)$：只要証明这个級数当 $t\geqslant\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ 时均匀收斂，或是証明 $\sum_{\nu=m}^\infty(\alpha-1)_\nu J'_\nu(t)+(\alpha)_{m-1}J'_m(t)$ 匀斂. 后者是

$$\sum_{\nu=m}^\infty O(\nu^{\alpha-1})O(\nu^{1-\beta}t^{\alpha-\beta})+O(m^\alpha)O(m^{1-\beta}t^{\alpha-\beta}),$$

它的匀斂性是显然的. 我們証明了等式 $V'_m=\sum_m^\infty(\alpha)_\nu\Delta J'_\nu$，并且建立了不等式

$$|V'_m(t)|\leqslant A\,m^{1+\alpha-\beta}\,t^{\alpha-\beta}.$$

我們还要証明 $V'_\nu(t)=O(\nu^\alpha t^{\alpha-1})$. 置 $\phi(t)\equiv 1$ 于等式

$$\frac{1}{\beta}[\phi(t)]_\beta=\sum_{\nu=0}^{\infty}S_\nu^\alpha \Delta J_\nu(t),$$

我們得到

$$\frac{1}{\beta}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha)_\nu \Delta J_\nu(t).$$

从 $0=\sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha)_\nu \Delta J'_\nu(t)$ 与 $V'_m(t)=\sum_{\nu=m}^{\infty}(\alpha)_\nu \Delta J'_\nu(t)$ 得到

$$\begin{aligned}V'_m(t)&=-\sum_{\nu=0}^{m}(\alpha)_\nu \Delta J'_\nu(t)\\&=-\sum_{\nu=0}^{m}(\alpha-1)_\nu J'_\nu(t)+(\alpha)_m J'_m(t)\\&=\sum_{\nu=1}^{m}O(\nu^{\alpha-1})t^{\alpha-1}+O(m^\alpha t^{\alpha-1})=O(m^\alpha t^{\alpha-1}).\end{aligned}$$

从而 $V'_m(t)=O\{\min(m^\alpha t^{\alpha-1},\ m^{1+\alpha-\beta}t^{\alpha-\beta})$. 定理 2 証毕.

定理 1 指出 $[\phi(t)]_\alpha$ 的有界变差性包含 $\mathfrak{S}[f,\theta]=S|C,\alpha+\varepsilon|$, 但 $\varepsilon>0$. 我們知道: 有界变差的 f 的系数只能說它們是 $O\left(\frac{1}{n}\right)$, 有界变差函数的富理埃級数未必絕对收斂.

在 $\alpha>0$ 的一般情况, 我們証明

定理 3 [*] 在点 θ, 假如 $[\phi(t)]_\alpha(0\leqslant t\leqslant\pi,\ \alpha>0)$ 是有界变差, 那末

$$\sigma_n^\alpha(\theta)-\sigma_{n-1}^\alpha(\theta)=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

首先建立

引理 設 $\alpha>0$, $k=[\alpha]$, $(\alpha)=\alpha-[\alpha]$. 置

$$K(u)\equiv K(n,u)=\int_u^\pi (t-u)^{-(\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k+1}g^\alpha(n,t)dt,$$

則当 $0<w\leqslant\pi$ 时, 函数

$$I=\int_w^\pi u^\alpha\, dK(u)$$

是均匀有界.

設 $\mu=\min(\alpha,\ 1+k)$, 我們利用估計式

---

[*] 陈建功, 科学記录(1943), 283—289.

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k g^\alpha(n, t)=O(n^k)(1+nt)^{-\mu} \quad (\alpha>0,\ k\geqslant 0,\ 0<t\leqslant\pi)$$

来証明引理. 由分部积分,

$$\int_w^\pi u^\alpha dK(u)=-w^\alpha K(w)-\alpha\int_w^\pi u^{\alpha-1}K(u)du.$$

将积分 $K(w)$ 写成在 $\left(w,\ w+\dfrac{1}{n}\right)$ 和 $\left(w+\dfrac{1}{n},\ \pi\right)$ 上的两个积分的和 K_1+K_2. 我們見到

$$w^\alpha K_1(w)=w^\alpha\int_w^{w+\frac{1}{n}}(t-w)^{-(\alpha)}O(n^{k+1})(nw)^{-\alpha}dt=O(1),$$

$$w^\alpha K_2(w)=w^\alpha n^{(\alpha)}\int_{w+\frac{1}{n}}^{t'}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k+1}g^\alpha(n, t)dt \quad (t'<\pi)$$

$$=w^\alpha n^{(\alpha)}O(n^k)(nw)^{-\alpha}=O(1),$$

由是

$$I=O(1)-\alpha\int_w^\pi u^{\alpha-1}K(u)du.$$

簡写 $g^\alpha(n, t)=g(t)$, 上式中的积分等于

$$\int_w^\pi u^{\alpha-1}\int_u^\pi(t-u)^{-(\alpha)}g^{(k+1)}(t)\,dt\,du=\int_w^\pi g^{(k+1)}(t)H(t)=\int_w^{2w}+\int_{2w}^\pi,$$

这里

$$H(t)=\int_w^t u^{\alpha-1}(t-u)^{-(\alpha)}du$$

$$=\frac{w^{\alpha-1}}{1-(\alpha)}(t-w)^{1-(\alpha)}+\frac{\alpha-1}{1-(\alpha)}\int_w^t u^{\alpha-2}(t-u)^{1-(\alpha)}du.$$

由于 $H'(t)>0$, 所以 $H(t)$ 是 t 的增加函数; 从而 $(w, 2w)$ 中有 w' 适合

$$\int_w^{2w}g^{(k+1)}(t)H(t)dt=H(2w)\int_{w'}^{2w}g^{(k+1)}(t)dt$$

$$=O(w^k)n^k(1+nw)^{-\alpha}=O(1).$$

假如 $k=0$, 那末积分 $\int_{2w}^\pi g^{(k+1)}(t)H(t)dt$ 的絕对值不大于

$$H(\pi)\left|\int_{w''}^\pi g'(t)dt\right|=O(1) \quad (2w<w''<\pi).$$

当 $k>0$ 时, 施行 k 次分部积分而得

$$\int_{2w}^{\pi} g^{(k+1)}(t) H(t)\,dt$$

$$=\Big[\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{k-\nu} g^{(\nu)}(t) H^{(k-\nu)}(t)\Big]_{2w}^{\pi}+(-1)^{k}\int_{2w}^{\pi} g'(t) H^{(k)}(t)\,dt.$$

但是，$w\geqslant 1$ 的話，左边等于——第二中值定理——

$$H(\pi)\int_{w_1}^{\pi} g^{(k+1)}(t)\,dt=O(1),$$

所需要詳細証明的是在 $w<1$ 的情况．当 $\nu<k$ 时，

$$[(-1)^{k-\nu} g^{\nu}(t) H^{(k-\nu)}(t)]_{2w}^{\pi}$$

$$=(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+\nu) g^{(\nu)}(\pi)\int_{w}^{\pi} u^{\alpha-k+\nu-1}(\pi-u)^{-(\alpha)}\,du$$

$$+O\{(nw)^{\nu}(1+nw)^{-1-\nu}\}=O(1).$$

对于 $\nu=k$ 的項：$[g^{(k)}(t) H(t)]_{2w}^{\pi}$ 等于

$$O(n^{k})[(1+n\pi)^{-\alpha} H(\pi)+(1+nw)^{-\alpha} H(2w)]$$

$$=O(1)+O[(nw)^{k}(1+nw)^{-\alpha}]=O(1).$$

总結起来，我們得到

$$\int_{2w}^{\pi} g^{(k+1)}(t) H(t)\,dt= O(1)+(-1)^{k}\int_{2w}^{\pi} g'(t) H^{(k)}(t)\,dt.$$

末項中的 $H^{(k)}(t)$ 等于

$$(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k)\int_{w}^{t} u^{\alpha-k-1}(t-u)^{-(\alpha)}\,du$$

$$+\sum_{\nu=1}^{k} A_{\nu} w^{\alpha-\nu}(t-w)^{\nu-k-(\alpha)},$$

这里的 $A_1, \cdots, A_k$ 都是常数．因此，利用第二中值定理，

$$\int_{2w}^{\pi} g'(t) H^{(k)}(t)\,dt$$

$$=\sum_{\nu=1}^{k} O(w^{\alpha-\nu}) w^{\nu-k-(\alpha)}\int_{w_{\nu}}^{\pi} g'(t)\,dt+(-1)^{k}(\alpha-1)\cdots(\alpha-k) J,$$

这里 $2w<w_{\nu}<\pi$，J 代表积分

$$\int_{2w}^{\pi} g'(t)\int_{w}^{t} u^{\alpha-k-1}(t-u)^{-(\alpha)}\,du\,dt.$$

当 $\alpha>k$ 时，由第二中值定理，

$$J=\int_{w}^{\pi} u^{(\alpha)-1}(\pi-u)^{-(\alpha)}\,du\cdot\int_{w^{*}}^{\pi} g'(t)\,dt=O(1)\quad(2w<w^{*}<\pi).$$

假如 α 是整数，那末 $\alpha=k$, $(-1)^k(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)J=0$. 由是

$$\int_{2w}^{\pi} g'(t)H^{(k)}(t)dt=O(1)+O(1)=O(1),$$

$$\int_{2w}^{\pi} g^{(k+1)}(t)H(t)dt=O(1),$$

$$\int_{w}^{2w} g^{(k+1)}(t)H(t)dt=O(1).$$

总結起来，得到 $I=O(1)$. 引理証毕.

由于 $n(\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha)=\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha-1)_{n-\nu}\,\nu A_\nu(\theta)/(\alpha)_n$，所以我們只要証明上式右端——記做 $\tau_n^\alpha(\theta)$——如有界，就証明了定理 3.

記 $[\alpha]=k$. 积分 $\tau_n^\alpha(\theta)$ 經过 k 次分部积分而得

$$\tau_n^\alpha(\theta)=\int_0^\pi \phi(t)\frac{d}{dt}g^\alpha(n,t)dt$$
$$=\left[\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}\Phi_\nu(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^\nu g^\alpha(n,t)\right]_0^\pi+(-1)^kI_n,$$

这里 I_n 代表积分

$$\int_0^\pi \Phi_k(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{k+1}g^\alpha(n,t)dt$$
$$=\int_0^\pi\left(\frac{d}{dt}\right)^{k+1}\frac{g^\alpha(n,t)}{\Gamma(k-\alpha+1)}\int_0^t(t-u)^{k-\alpha}\Phi_\alpha(u)du\,dt.$$

因此

$$I_n\cdot\Gamma(k-\alpha+1)=\int_0^\pi\int_u^\pi(t-u)^{-(\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k+1}g^\alpha(n,t)dt\,d\Phi_\alpha(u)$$
$$=-\int_0^\pi\Phi_\alpha(u)dK(u)$$
$$=-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\pi u^\alpha[\phi(u)]_\alpha dK(u).$$

分部积分，

$$\Gamma(1+\alpha)\Gamma(k-\alpha+1)I_n=\int_0^\pi I(u)d[\phi(u)]_\alpha.$$

由引理，$I(u)$ 是有界的；由假設 $[\phi(u)]_\alpha$ 是有界变差；因此从上式得到 $I_n=O(1)$. 从而 $\tau_n^\alpha(\theta)=O(1)$. 証明完毕.

波山桂有例表明（倫敦数学会期刊 J. L. M. S. 第十一卷，1936）$[\phi(t)]_\alpha$ $(\alpha>0,\ 0\leqslant t\leqslant\pi)$的有界变差性并不含有 $\sum|\sigma_n^\alpha(\theta)-\sigma_{n-1}^\alpha(\theta)|$ 的收斂；波山桂在这篇文章中又有例表明：后者的收斂并不包含函数 $[\phi(t)]_{\alpha+1}$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$ 的有界变差性．然則 $\{\sigma_n^\alpha(\theta)\}$ 具有怎样更强的性质时，才能說 $[\phi(t)]_{\alpha+1}$ 是有界变差？

定理 4 假如級数 $\sum\log n\cdot|\sigma_n^\alpha(\theta)-\sigma_{n-1}^\alpha(\theta)|$ 收斂，那末函数 $[\phi(t)]_{\alpha+1}$ 在 $[0,\ \pi]$ 是有界变差，$\alpha>-\dfrac{1}{2}$.

这个結果是著者在科学記录第一卷（1945），290—299 的文中証明的．証明需要較多的預备知識，移到后面来完成．

定理 5 若 $\alpha>-1$，則当 $\sum u_n=S|C,\alpha|$ 时，对于任一正数 ε，成立着

$$\sum u_n=S|C,\ \alpha+\varepsilon|.$$

当 $\alpha\geqslant0$ 时，$\sum u_n=S|C,\alpha|$ 含有 $\sum u_n=S|C,\alpha+\varepsilon|$ 的定理，是戈格貝脫良玆于 1925 年在法国杂志（Bull. M. 49）上发表的．他的工作，著者尙未寓目，下面的証明，对于 $\alpha>-1$ 的情况也是有效的．

【証明】 置 $\alpha+\varepsilon=\beta$，則 $(\beta)_n\sigma_n^\beta=\sum\limits_{\nu=0}^{n}(\beta-1)_{n-\nu}u_\nu$，它也等于

$$\sum_{\nu=0}^{n}(\varepsilon-1)_{n-\nu}(\alpha)_\nu\sigma_\nu^\alpha=\sum_{\nu=0}^{n-1}(\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu+1}^\alpha)\sum_{\mu=0}^{\nu}(\alpha)_\mu(\varepsilon-1)_{n-\mu}+(\beta)_n\sigma_n^\alpha.$$

因此

$$\sigma_n^\beta-\sigma_{n-1}^\beta=\frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n}(\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha)+\sum_{=0}^{n-2}(\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu+1}^\alpha)(n,\ \nu),$$

这里

$$(n,\ \nu)=(n,\ \nu)_1+(n,\ \nu)_2,$$

$$(n,\ \nu)=\sum_{\mu=0}^{\nu}(\alpha)_\mu\left(\frac{(\varepsilon-1)_{n-\mu}}{(\beta)_n}-\frac{(\varepsilon-1)_{n-\mu-1}}{(\beta)_{n-1}}\right),$$

$$(n,\ \nu)_1=\frac{1+\alpha}{(1-\varepsilon)(\beta)_{n-1}}\sum_{\mu=0}^{\nu}(\alpha)_\mu(\varepsilon-2)_{n-\mu},$$

$$(n,\ \nu)_2=\frac{\beta(\alpha+1)}{(\varepsilon-1)(\beta+1)(\beta+1)_{n-1}}\sum_{\mu=0}^{\nu}(\alpha+1)_\mu(\varepsilon-2)_{n-\mu}.$$

由是，注意到 $0<(\alpha)_n<(\beta)_n$，

$$\sum_{n=1}^{N}|\sigma_n^\beta-\sigma_{n-1}^\beta|$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{(\alpha)_n}{(\beta_n)}|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|+\sum_{n=2}^{N}\sum_{\nu=0}^{n-2}|(\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu+1}^\alpha)(n, \nu)|$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{N}|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|+\sum_{\nu=0}^{N-2}|\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu+1}^\alpha|\sum_{n=\nu+2}^{N}|(n, \nu)|,$$

我們只要証明$\sum_{n=\nu+2}^{N}|(n, \nu)|$对于$\nu$和$N$为均匀有界好了.

有只与α和β有关的数C适合

$$\sum_{n=2\nu+1}^{N}|(n, \nu)_1|<C\sum_{n=2\nu+1}^{N}n^{-\beta}\cdot n^{\varepsilon-2}\sum_{\mu=0}^{\nu}(\alpha)_\mu=C(\alpha+1)_\nu\sum_{n=2\nu+1}^{N}n^{-2-\alpha}.$$

由是,对于N和ν,均匀地成立着

$$\sum_{n=2\nu+1}^{N}|(n, \nu)_1|=O(1).$$

要闡明$\sum_{n=\nu+1}^{\infty}|(n, \nu)_1|=O(1)$,还要証明

$$\sum_{n=\nu+2}^{2\nu}\frac{1}{(\beta)_{n-1}}\sum_{\mu=0}^{\nu}(\alpha)_\mu(\varepsilon-2)_{n-\mu}=O(1).$$

由于$(\varepsilon-2)_m<0\ \ (m>0)$,所以上式左边項項都是負数;其絕对值等于

$$-\sum_{n=\nu+2}^{2\nu}\frac{1}{(\beta)_{n-1}}\sum_{\mu=0}^{\nu}(\alpha)_\mu(\varepsilon-2)_{n-\mu}=-O(\nu^{-\beta})\sum_{\mu=0}^{\nu}(\alpha)_\mu\sum_{n=\nu+2}^{2\nu}(\varepsilon-2)_{n-\mu}$$
$$=\sum_{\mu=0}^{\nu}(\alpha)_\mu\{(\varepsilon-1)_{\nu-\mu+1}-(\varepsilon-1)_{2\nu-\mu}\}O(\nu^{-\beta})<\sum_{\mu=0}^{\nu}(\alpha)_\mu(\varepsilon-1)_{\nu-\mu}$$
$$=(\beta)_\nu O(\nu^{-\beta})=O(1).$$

同样可証

$$\sum_{n=\nu+1}^{\infty}|(n, \nu)_2|=O(1).$$

証明完毕.

7. 有关$|C, \alpha|$求和的一个等式

当$\mathfrak{S}[f, \theta]$可用$|C, \alpha|$求和时,我們将建立一个如下的等式:假如积分

$$J(t)=\int_{+0}^{1}u^a(1-u)^b\phi(ut)du\quad (a>-1,\ b>a>-1)$$

依某种意义存在(当 $a\geqslant 0,\ b\geqslant 0$ 时, $J(t)$ 显然存在), 那末有 $F_\nu(t,\alpha)$ 适合于

$$J(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}[\sigma_\nu^\alpha(\theta)-\sigma_{\nu-1}^\alpha(\theta)]F_\nu(t,\alpha)\quad(\sigma_{-1}^\alpha=0).$$

我們将利用这个等式导出一些結果.

首先引入函数

$$C_\varepsilon(x;a,b)=\int_\varepsilon^1 u^a(1-u)^b\left(1-\frac{\varepsilon}{u}\right)^c \operatorname{cs}(xu)\,du,$$

这里 $c-1>\max(a,b)$, $\min(a,b)>-1$, $x>0$, $\operatorname{cs}(u)$ 表示下列四个函数的一个:

$$\cos u,\ \sin u,\ -\cos u,\ -\sin u,$$

$0<\varepsilon<1$.

引理 1 (i) 当 $0<\varepsilon<1$ 时, 均匀地成立着

$$C_\varepsilon(x;a,b)=O(x^{-1-a})+O(x^{-1-b}).$$

(ii) $|C_\varepsilon(x;a,b)|\leqslant K_\varepsilon x^{-1-b}$ (K_ε 只和 ε 有关系).

(iii) 假如 $c-1>\max(a+k,b)$, 那末, 当 $0<\varepsilon<1$ 时, 均匀地成立着

$$\Delta^k C_\varepsilon(nt;a,b)=O(n^{-k})(nt)^{-1-a}+O(t^k)(nt)^{-1-b}\quad(t>0),$$

并且 $|\Delta^k C_\varepsilon(nt;a,b)|\leqslant K_\varepsilon t^k(nt)^{-1-b}$.

(iv) 置 $H=\min(1+b,\ a+k+2)$, 则当 $t>0$ 时,

$$\Delta^k\frac{d}{dt}C_0(nt;a,b)=O(n)t^k(1+nt)^{-H}.$$

(v) $\Delta^k C_0(nt;a,b)=O(t^k)\{(1+nt)^{-1-b}+(1+nt)^{-1-a-k}\}$.

【証明】 (i) 設 $k=\min(1+[a],\ 1+[b])$, 經过 k 次分部积分之后, $C_\varepsilon(x;a,b)$ 变成

$$x^{-k}\int_\varepsilon^1 \operatorname{cs}(xu)\left(\frac{d}{du}\right)^k\left\{u^a(1-u)^b\left(1-\frac{\varepsilon}{u}\right)^c\right\}du$$

$$=x^{-k}\sum_{\substack{l\geqslant 0,\ m\geqslant 0,\ n\geqslant 0\\ l+m+n=k}}A_{l,m,n}\int_\varepsilon^1 \operatorname{cs}(xu)u^{a-c-l}(1-u)^{b-m}(u-\varepsilon)^{c-n}\,du,$$

常数 $A_{l,m,n}$ 与 x 和 ε 无关系.

当 $0<m<k$ 时, $a>l+n$, $b>m$. 因此, 相当的积分

$$\int_{\varepsilon}^{1}\operatorname{cs}(xu)u^{a-l-n}(1-u)^{b-m}\left(1-\frac{\varepsilon}{u}\right)^{c-n}du$$

$$=1^{a-l-n}\left(1-\frac{\varepsilon}{1}\right)^{c-n}(1-\varepsilon)^{b-m}\int\operatorname{cs}(xu)\,du,$$

最后的积分的上限和下限是在ε与1之間的. 从而这个积分等于$O(x^{-1})$. 由是,

$$x^{-k}\sum_{\substack{l\geq 0,\, m\geq 0,\, n\geq 0\\ l+m+n=k}}A_{l,m,n}\int_{\varepsilon}^{1}\operatorname{cs}(xu)u^{a-l-c}(1-u)^{b-m}(u-\varepsilon)^{c-n}du$$

的絕对值小于Ax^{-1-k} $(x>0)$, A是絕对常数.

对应于$m=0$的项的形式是

$$x^{-k}A_{l,0,n}\int_{\varepsilon}^{1}u^{a-k}(1-u)^{b}\left(1-\frac{\varepsilon}{u}\right)^{c-n}\operatorname{cs}(xu)\,du$$

$$=O(x^{-k})\int_{\eta}^{1}u^{a-k}(1-u)^{b}\operatorname{cs}(xu)\,du,$$

这里$\varepsilon<\eta<1$, $O(x^{-k})$小于Ax^{-k}, A表示絕对常数. 当$\eta\geq\frac{1}{2}$时, 最后的积分不大于

$$\max_{\frac{1}{2}<v<1}v^{a-k}\left|\int(1-u)^{b}\operatorname{cs}(xu)\,du\right|\leq 2^{|a-k|}\{O(1)+O(x^{-b})\}x^{-1},$$

当$b\geq 0$时, $O(x^{-b})$的项可以略去.

假如$\eta<\frac{1}{2}$, 那末

$$\int_{\eta}^{1}u^{a-k}(1-u)^{b}\operatorname{cs}(xu)du$$

$$=\int_{\eta}^{\frac{1}{2}}u^{a-k}(1-u)^{b}\operatorname{cs}(xu)du+O(x^{-1})+O(x^{-1-b})$$

$$=\max_{\eta<u<\frac{1}{2}}(1-u)^{b}\int u^{a-k}\operatorname{cs}(xu)du+O(x^{-1})+O(x^{-1-b})$$

$$=O(2^{|b|})O(x^{k-a-1})+O(x^{-1})+O(x^{-1-b}).$$

因此, 总結起来,

$$A_{l,0,n}x^{-k}\int_{\varepsilon}^{1}u^{a-k}(1-u)^{b}\left(1-\frac{\varepsilon}{u}\right)^{c-n}\operatorname{cs}(xu)\,du$$

$$=O(x^{-1-k})+O(x^{-1-a})+O(x^{-b-1-k}).$$

同样可証

$$A_{0,k,0}\,x^{-k}\int_{\varepsilon}^{1}u^{a}(1-u)^{b-k}\left(1-\frac{\varepsilon}{u}\right)^{c}\mathrm{cs}(xu)\,du$$
$$=O(x^{-1-a-k})+O(x^{-1-b})+O(x^{-1-k}).$$

由是，当 $x\geqslant1$ 时，$C_\varepsilon(x;\,a,\,b)$ 所組成的各部分都是 $O(x^{-a-1})+O(x^{-b-1})$，所以（i）成立．应該注意的是当 $0<x<1$ 时，

$$C_\varepsilon(x;a,\,b)=O(1)=O(x^{-1-a})+O(x^{-1-b}).$$

（ii）从（i）的証明，假如我們放弃 $O(x^{-1-a})+O(x^{-1-b})$ 中 O 的关于 ε 的均匀性，那末就得到（ii）．

（iii）暂且簡写 $C_\varepsilon(x;\,a,\,b)=C(x)$，那末

$$\Delta^k C_\varepsilon(nt;\,a,\,b)=t^k\int_{n+1}^{n}\int_{x_1+1}^{x_1}\cdots\int_{x_{k-1}+1}^{x_{k-1}}C^{(k)}(x_k t)\,dx_k\,dx_{k-1}\cdots dx_1,$$
$$C^{(k)}(x)=C_\varepsilon(x,\,a+k,\,b).$$

从而

$$\int_{x_{k-1}+1}^{x_{k-1}}C^{(k)}(x_k\,t)\,dx_k=\int_{x_{k-1}+1}^{x_{k-1}}\{O(x_k\,t)^{-1-a-k}+O(x_k\,t)^{-1-b}\}\,dx_k$$
$$=O(x_{k-1}\,t)^{-1-a-k}+O(x_{k-1}\,t)^{-1-b}.$$

累次积分，就达到所要的結果．

（iv）由于 $C'(nt;\,a,\,b)=n\,C(nt;\,a+1,\,b)=n\,C(x)$，所以

$$\Delta^k\frac{d}{dt}C(nt;\,a,\,b)=n\,t^k\int_{n+1}^{n}\int_{x_1+1}^{x_1}\cdots\int_{x_{k-1}+1}^{x_{k-1}}C^{(k)}(x_k\,t)\,dx_k\,dx_{k-1}\cdots dx_1.$$

又因 $C^{(k)}(x)=C(x;\,a+k+1,\,b)=O(1)$，故当 $nt<1$ 时，上式右端等于

$$O(nt^k)=O(nt^k)(1+nt)^{-H}.$$

假如 $nt\geqslant1$，那末从 $C_\varepsilon(x_k t;\,a+k+1,\,b)=O(x_k\,t)^{-H}$，就得到所要的結果．

（v）从（iv）可以立刻得到（v）．

現在考慮积分

$$C_n(t)=\int_0^1 u^a(1-u)^b\cos(n\,u\,t)\,du\quad(a>-1,\,b>-1,\,0<t\leqslant\pi)$$

的和 $S_n(t)=\frac{1}{2}C_0(t)+C_1(t)+\cdots+C_n(t)$. 我們見到

$$S_n(t)=\int_0^1 u^a(1-u)^b \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(ut)}{2\sin\frac{1}{2}(ut)}du.$$

引理 2 在区間 $0<t\leqslant\pi$ 上成立着

$$S_n(t)=O(t^{-1})(1+nt)^{-L}\quad (L=\min(1,\ a,\ b+1)),$$
$$S_n'(t)=O(t^{-2})(1+nt)^{-L'}\quad (L'=\min(0,\ a,\ b)).$$

【証明】 写着

$$S_n(t)=S_{n1}(t)+S_{n2}(t),\ \ S_{n1}(t)=\int_0^{\frac{1}{2}},\ \ S_{n2}(t)=\int_{\frac{1}{2}}^1.$$

由第二中值定理, $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ 中有子区間 $(t_0,\ t_1)$ 以及常数 A 适合

$$S_{n2}(t)=\frac{A}{t}\int_{t_0}^{t_1}(1-u)^b\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(ut)du,$$

从而 $tS_{n2}(t)=O(nt)^{-1-b}+O(nt)^{-1}$. 将这結果, 与 $tS_{n2}(t)=O(1)$ 相結合, 就获得

$$tS_{n2}(t)=O(1+nt)^{-L}.$$

利用第二中值定理, $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ 中有适合于下式的 t' 和 t'' 以及常数 B:

$$S_{n1}(t)=Bt^{-1}\int_{t'}^{t''}u^{a-1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(ut)du,\ \ |B|<2^{1+|b|}.$$

因此 $tS_{n1}(t)=O(1+nt)^{-a}+O(1+nt)^{-1}$. 并且得到

$$tS_n(t)=O(1+nt)^{-L}.$$

設 $N=n+\frac{1}{2}$, $S_n'(t)$ 可以分成如下的四个部分:

$$S_n'(t)=\sum_{j=1}^4\sigma_{nj}(t),$$

$$\sigma_{n1}(t)+\sigma_{n2}(t)=N\left(\int_0^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1\right)u^{a+1}(1-u)^b\frac{\cos(Nut)}{2\sin\frac{1}{2}(ut)}du,$$

$$\sigma_{n3}(t)+\sigma_{n4}(t)=-\frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1\right)u^{a+1}(1-u)^b\cot\frac{ut}{2}\,\frac{\sin(Nut)}{\sin\frac{1}{2}(ut)}du.$$

用上面的估計法于 $\sigma_{nj}(t)$ $(j=1, 2, 3, 4)$，我們得到

$$t\,\sigma_{n1}(t)=O(N)(Nt)^{-1-a}+O(N)(Nt)^{-1},$$
$$t\,\sigma_{n2}(t)=O(N)(Nt)^{-1-b}+O(N)(Nt)^{-1},$$
$$t^2\sigma_{n3}(t)=O(Nt)^{-a}+O(Nt)^{-1},$$
$$t^2\sigma_{n4}(t)=O(Nt)^{-1-b}+O(Nt)^{-1}.$$

相加卽得

$$t^2S'_n(t)=O(Nt)^{-a}+O(Nt)^{-b}+O(1)=O(1+nt)^{-L'}.$$

引理3 設 $a>-1$，$b>a>-1$，a 和 b 都大于 $-1-\alpha$，$c>\max(a+\alpha+2,\ b+1)$，$t>0$，則当 $\varepsilon\to+0$ 时，函数

$$F_\nu(\varepsilon,\ t,\ \alpha)=\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha)_\mu\sum_{n=\mu}^{\infty}(-2-\alpha)_{n-\mu}C_\varepsilon(nt;\ a,\ b)$$

收斂于

$$F_\nu(t,\ \alpha)=\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha)_\mu\sum_{n=\mu}^{\infty}(-2-\alpha)_{n-\mu}C_0(nt;\ a,\ b);$$

对于 $0<\varepsilon\leqslant1$ 來說，均匀的等于

$$O(\nu t)^{-1-a}+\begin{cases}O(\nu t)^{-b+[\alpha]} & (\alpha>[\alpha]),\\ O(\nu t)^{-b-1+\alpha} & (\alpha=[\alpha]).\end{cases}$$

【証明】 当 $\alpha=[\alpha]$ 时，$\sum(-2-\alpha)_{n-\mu}C_\varepsilon(nt;\ a,\ b)$ 等于

$$\sum_{n=\mu}^{\infty}(-2-[\alpha])_{n-\mu}C_\varepsilon(nt;\ a,\ b)=\sum_{m=0}^{\alpha+1}(-2-\alpha)_mC_\varepsilon(\overline{m+\mu t};\ a,\ b)$$
$$=\varDelta^{\alpha+1}C_\varepsilon(\mu t;\ a,\ b).$$

此时 $F_\nu(\varepsilon,\ t,\ \alpha)$ 等于

$$\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha)_\mu\,\varDelta^{\alpha+1}C_\varepsilon(\mu t;\ a,\ b)$$
$$=(\alpha)_{\nu-1}\,\varDelta^{\alpha}C_\varepsilon(\nu t;\ a,\ b)+\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha-1)_\mu\,\varDelta^{\alpha}C_\varepsilon(\mu t;\ a,\ b)$$
$$=O(\nu t)^{-1-a}+O(\nu t)^{-1+\alpha-b}.$$

当 $\alpha>[\alpha]$ 时，首先注意：当 $\varepsilon\to0$ 时，

$$g_\mu(\varepsilon,\ t,\ \alpha+2)=\sum_{n=2\mu+1}^{\infty}(-2-\alpha)_{n-\mu}C_\varepsilon(nt;\ a,\ b)$$

匀斂于 $\sum\limits_{2\mu+1}^{\infty}(-2-\alpha)_{n-\mu}C_0(nt)$．事实上，上面的級数等于

$$\sum_{n=2\mu+1}^{\infty} O(n^{-2-\alpha})\{(nt)^{-1-a}+(nt)^{-1-b}\}$$
$$=O(\mu^{-2-\alpha-a}t^{-1-a})+O(\mu^{-2-\alpha-b}t^{-1-b}).$$

記 $\lim_{\varepsilon\to 0} g_\mu(\varepsilon, t, \alpha+2)=g_\mu(t, \alpha+2)$，那末

$$\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha)_\mu g_\mu(t, \alpha+2)=\sum_{\mu=\nu}^{\infty} O(\mu^{-2-a}t^{-1-a})+\sum_{\mu=\nu}^{\infty} O(\mu^{-2-b}t^{-1-b})$$
$$=O(\nu t)^{-1-a}+O(\nu t)^{-1-b}.$$

又記

$$h_\mu(\varepsilon, t, \alpha+2)=\sum_{n=\mu}^{2\mu}(-2-\alpha)_{n-\mu}C_\varepsilon(nt; a, b),$$

$$(f_\nu)_1: \qquad f_\nu(\varepsilon, t, \alpha)=\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha)_\mu h_\mu(\varepsilon, t, \alpha+2),$$

$$H_\mu(\varepsilon, t, \alpha+2)=\sum_{j=\mu}^{\infty} h_j(\varepsilon, t, \alpha+2).$$

我們証明

$$(f_\nu)_2: \qquad f_\nu(\varepsilon, t, \alpha)$$
$$=(\alpha)_{\nu-1}H_\nu(\varepsilon, t, \alpha+2)+\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha-1)_\mu H_\mu(\varepsilon, t, \alpha+2).$$

由于

$$\sum_{j>\frac{n}{2}}^{n}(-2-\alpha)_{n-j}C_\varepsilon(nt; a, b)=(-1-\alpha)_{[\frac{n}{2}]}C_\varepsilon(nt; a, b)$$
$$=O(n^{-1-\alpha})\{(nt)^{-1-a}+(nt)^{-1-b}\},$$

$$\sum_{n=\mu}^{2\mu}\sum_{j=\mu}^{n}(-2-\alpha)_{n-j}C_\varepsilon(nt; a, b)=h_\mu(\varepsilon, t, \alpha+1),$$

所以将 $H_\mu(\varepsilon, t, \alpha+2)=\sum_{j=\mu}^{\infty}\sum_{n=j}^{2j}(-2-\alpha)_{n-j}C_\varepsilon(nt; a, b)$ 中的加法順序交换，可以获得如下的关系式：

$$H_\mu(\varepsilon, t, \alpha+2)=h_\mu(\varepsilon, t, \alpha+1)+\sum_{n=2\mu+1}^{\infty}(-1-\alpha)_{[\frac{n}{2}]}C_\varepsilon(nt; a, b),$$

最后的級数是

$$O\Big(\sum_{n=2\mu+1}^{\infty} n^{-1-\alpha}\{(nt)^{-1-a}+(nt)^{-1-b}\}\Big)=O(\mu^{-\alpha})\{(\mu t)^{-1-a}+(\mu t)^{-1-b}\},$$

乘以$(\alpha-1)_\mu$ 而施行加法 $\sum_{\mu=\nu}^{\infty}$，它匀斂于一个函数 $L_\nu(\varepsilon, t, \alpha-1)$；事实上，

$$\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha-1)_{\mu}\,\mu^{-\alpha}\{(\mu t)^{-1-a}+(\mu t)^{-1-b}\}=O(\nu t)^{-1-a}+O(\nu t)^{-1-b}.$$

由是，假如級数

$$\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha-1)_{\mu}\,h_{\mu}(\varepsilon,\ t,\ \alpha+1)=f_{\nu}(\varepsilon,\ t,\ \alpha-1)$$

收斂，那末

$$\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha-1)_{\mu}\,H_{\mu}(\varepsilon,\ t,\ \alpha+2)=f_{\nu}(\varepsilon,\ t,\ \alpha-1)+L_{\nu}(\varepsilon,\ t,\ \alpha-1),$$

从而得到

$$(f_{\nu})_{3}:\qquad f_{\nu}(\varepsilon,\ t,\ \alpha)$$
$$=(\alpha)_{\nu-1}\,H_{\nu}(\varepsilon,\ t,\ \alpha+2)+L_{\nu}(\varepsilon,\ t,\ \alpha-1)+f_{\nu}(\varepsilon,\ t,\ \alpha-1).$$

但是 $(f_{\nu})_{3}$ 是 $(f_{\nu})_{1}$ 經过和差变换而得的，除开假設 $f_{\nu}(\varepsilon,\ t,\ \alpha)$ 和 $f_{\nu}(\varepsilon,\ t,\ \alpha-1)$ 的存在还需要条件

$$\lim_{N\to\infty}(\alpha)_{N-1}\,h_{N}(\varepsilon,\ t,\ \alpha+1)=0,$$

$(f_{\nu})_{3}$ 才有效．至于 $(f_{\nu})_{1}$ 的收斂，以及上記条件的成立，可从下面有关 h_{μ} 的性质明白：設 $0<\varepsilon<1$，$t>0$，$\beta\leqslant\alpha+1$，則

1° $h_{\mu}(\varepsilon,\ t,\ \beta)=O(\mu^{1-\beta})\{(\mu t)^{-1-a}+(\mu t)^{-1-b+[\beta]}\}\quad(\beta>[\beta])$,

2° $h_{\mu}(\varepsilon,\ t,\ \beta)=O(\mu^{1-\beta})\{(\mu t)^{-1-a}+(\mu t)^{-2-b+\beta}\}\quad(\beta=[\beta])$.

当 $\beta>[\beta]$ 时，施行 $[\beta]$ 次和差变换，知 $h_{\mu}(\varepsilon,\ t,\ \beta)$ 等于

$$\sum_{n=\mu}^{2\mu}([\beta]-\beta)_{n-\mu}\,\Delta^{[\beta]}\,C_{s}(nt;\ a,\ b)+\sum_{k=1}^{[\beta]}(k-\beta)_{\mu}\Delta^{k-1}C_{s}(\overline{2\mu+1}t;\ a,\ b)$$
$$=\Sigma_{1}+\Sigma_{2}.$$

由引理 1 的(iii)，

$$\Sigma_{2}=\sum_{k=1}^{[\beta]}(k-\beta)_{\mu}\{O(\mu^{1-k})(\mu t)^{-1-a}+O(t^{k-1})(\mu t)^{-1-b}\}$$
$$=O(\mu^{1-\beta})\{(\mu t)^{-1-a}+(\mu t)^{-2-b+[\beta]}\}.$$

由于 $\sum_{n=\mu}^{2\mu}([\beta]-\beta)_{n-\mu}=([\beta]+1-\beta)_{\mu}$，所以 $|\Sigma_{1}|$ 小于

$$([\beta]+1-\beta)_{\mu}\max_{\mu\leqslant n\leqslant 2\mu}|\Delta^{[\beta]}\,C_{s}(nt;\ a,\ b)|$$
$$=O(\mu^{1-\beta})\{(\mu t)^{-1-a}+(\mu t)^{[\beta]-b-1}\}.$$

将 Σ_{1} 与 Σ_{2} 相加，就得到 1°.

当β是一正整数时，应用引理1的(iii)于

$$\sum_{n=\mu}^{2\mu}(-\beta)_{n-\mu}C_{\varepsilon}(nt;a,b)=\Delta^{\beta-1}C_{\varepsilon}(\mu t;a,b),$$

就得到2°.

由1°和2°，知：当$\beta=(\alpha)+1,\cdots,\alpha+1$时，成立着

$$\lim_{N\to\infty}(\beta-1)_{N-1}h_N(\varepsilon,t,\beta)=0.$$

由是$(f_\nu)_3$可以改写为

$$(f_\nu)_4:\quad f_\nu(\varepsilon,t,\alpha)=f_\nu(\varepsilon,t,(\alpha)-1)+\sum_{k=1}^{[\alpha]+1}L_\nu(\varepsilon,t,\alpha-k)$$
$$+\sum_{k=0}^{[\alpha]}(\alpha-k)_{\nu-1}H_\nu(\varepsilon,t,\alpha+2-k),$$

这里$(\alpha)=\alpha-[\alpha]$, $b>[\alpha]$. 关于$L_\nu(\varepsilon,t,\alpha-k)$，上面已經作出估計，从而

$$\sum_{k=1}^{[\alpha]+1}L_\nu(\varepsilon,t,\alpha-k)=O(\nu t)^{-1-\alpha}+O(\nu t)^{-1-b}.$$

我們也已經知道：

$$H_\nu(\varepsilon,t,\alpha+2-k)=O(\nu^{k-\alpha})\{(\nu t)^{-1-\alpha}+(\nu t)^{[\alpha]-b}\},$$

因此$(f_\nu)_4$的末項是

$$\sum_{k=0}^{[\alpha]}O(\nu^{\alpha-k},\nu^{k-\alpha})\{(\nu t)^{-1-\alpha}+(\nu t)^{[\alpha]-b}\}=O(\nu t)^{-1-\alpha}+O(\nu t)^{[\alpha]-b},$$

总結起来，关于ε均匀地成立着

$$f_\nu(\varepsilon,t,\alpha)=f_\nu(\varepsilon,t,(\alpha)-1)+O(\nu t)^{-1-\alpha}+O(\nu t)^{[\alpha]-b}.$$

现在証明級数

$$f_\nu(\varepsilon,t,(\alpha)-1)=\sum_{\mu=\nu}^{\infty}((\alpha)-1)_\mu h_\mu(\varepsilon,t,(\alpha)+1),$$

当$\varepsilon\to0$时，匀斂于

$$f_\nu(t,(\alpha)-1)=\Delta_\nu(t,(\alpha))+\sum_{n=2\nu+1}^{\infty}C_0(nt;a,b)\delta_n(\alpha),$$

这里$\Delta_\nu(t,(\alpha))$是

$$\Delta_\nu(\varepsilon,t,(\alpha))=\sum_{n=\nu}^{2\nu}C_\varepsilon(nt;a,b)\sum_{\mu=\nu}^{n}((\alpha)-1)_\mu(-(\alpha)-1)_{n-\mu}$$

当$\varepsilon\to0$时的极限，

$$\delta_n(\alpha)=\sum_{\mu\geq\frac{n}{2}}^{n}((\alpha)-1)_\mu(-(\alpha)-1)_{n-\mu}=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-(\alpha)-1)_m((\alpha)-1)_{n-m}$$

$$=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-(\alpha))_m((\alpha)-2)_{n-m}+O\left(\frac{1}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

由和差变換，

$$\sum_{\mu=\nu}^{n}((\alpha)-1)_\mu(-(\alpha)-1)_{n-\mu}$$

$$=\sum_{m=0}^{n-\nu}(-(\alpha))_m((\alpha)-2)_{n-m}+(-(\alpha))_{n-\nu}((\alpha)-1)_{\nu-1}.$$

$\nu\leqslant n\leqslant 2\nu$ 的話，上式是

$$O(\nu^{(\alpha)-2})(1-(\alpha))_{n-\nu}+O(\nu^{(\alpha)-1})(-(\alpha))_{n-\nu}.$$

簡写 $\min(a,\ b)=(a,\ b)$，那末 $C_\varepsilon(nt;\ a,\ b)=O(nt)^{-1-(a,\ b)}$，从而

$$\Delta_\nu(\varepsilon,\ t,\ (\alpha))$$

$$=\sum_{n=\nu}^{2\nu}O(nt)^{-1-(a,\ b)}\{\nu^{(\alpha)-2}(1-(\alpha))_{n-\nu}+\nu^{(\alpha)-1}(-(\alpha))_{n-\nu}\}$$

$$=O(\nu t)^{-1-(a,\ b)}\{\nu^{(\alpha)-2}\cdot\nu^{2-(\alpha)}+\nu^{(\alpha)-1}\cdot\nu^{1-(\alpha)}\}=O(\nu t)^{-1-(a,\ b)}.$$

从等式

$$\sum_{\mu=\nu}^{M-1}((\alpha)-1)_\mu h_\mu(\varepsilon,\ t,\ (\alpha)+1)$$

$$=\sum_{n=2\nu+1}^{2M}C_\varepsilon(nt;\ a,\ b)\sum_{\mu\geq\frac{n}{2}}^{n}((\alpha)-1)_\mu(-(\alpha)-1)_{n-\mu}$$

$$+\Delta_\nu(\varepsilon,\ t,\ (\alpha))-\Delta_M(\varepsilon,\ t,\ (\alpha)),$$

以及 $\lim\Delta_M(\varepsilon,\ t,\ (\alpha))=0$，就得到上述关于 $f_\nu(t,\ (\alpha)-1)$ 的結果.

总的說来，我們見到：当 $\varepsilon\to 0$ 时，函数

$$F_\nu(\varepsilon,\ t,\ \alpha)=\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha)_\mu h_\mu(\varepsilon,\ t,\ \alpha+2)+\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha)_\mu g_\mu(\varepsilon,\ t,\ \alpha+2)$$

$$=f_\nu(\varepsilon,\ t,\ \alpha)+\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha)_\mu g_\mu(\varepsilon,\ t,\ \alpha+2)$$

匀斂于

$$F_\nu(t,\ \alpha)=f_\nu(t,\ \alpha)+\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha)_\mu g_\mu(t,\ \alpha+2)$$

$$=O(\nu t)^{-1-(a,\ b)}+O(\nu t)^{(\alpha)-b}.$$

結合关于$h_\mu(\varepsilon, t, \beta)$的(2°)，就完成了引理 3 的証明.

現在用如下的$\chi(u)$来代积分$C_\varepsilon(x; a, b)$中的因子$(1-u)^b$：在$\left[0, \frac{1}{4}\right]$上，$\chi(u)$等于1，在$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$上$\chi(u)$等于$(1-u)^b$，$\chi(u)$在$[0, 1]$中是具有适当性质的連續函数. 仿效引理 1 和引理 3 的証明，明显地可以建立如下的

引理 4 設

$$0<\varepsilon<1,\ a>-1,\ b>-1,\ a\text{和}b\text{都大于}-1-\alpha,$$
$$(a, b)=\min(a, b),\ c>\max(1+a, 1+b),$$
$$\mathscr{C}_\varepsilon(x; a, b)=\int_\varepsilon^1 u^a\chi(u)\left(1-\frac{\varepsilon}{u}\right)^c \operatorname{cs}(xu)du,$$

則当$x>0$时，$\mathscr{C}_\varepsilon(x; a, b)=O((1+x)^{-1-(a, b)})$关于$\varepsilon$均匀地成立. 假如$c>\max(a+k+1, b+1)$，那末

$$\Delta^k\mathscr{C}_\varepsilon(nt; a, b)=O(n^{-k})(nt)^{-1-a}+O(t^k)(nt)^{-1-b}$$

关于ε均匀地成立，左端的絕对値也小于$K(\varepsilon)t^k(nt)^{-1-b}$. 若

$$c>\max(a+\alpha+2,\ b+1),\quad t>0,$$

則当$\varepsilon\to 0$时，函数

$$\mathscr{F}_\nu(\varepsilon, t, \alpha)=\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha)_\mu\sum_{n=\mu}^{\infty}(-2-\alpha)_{n-\mu}\mathscr{C}_\varepsilon(nt; a, b)$$

收斂于

$$\mathscr{F}_\nu(t, \alpha)=\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha)_\mu\sum_{n=\mu}^{\infty}(-2-\alpha)_{n-\mu}\mathscr{C}_0(nt; a, b)$$
$$=O(\nu t)^{-1-a}+\begin{cases}O(\nu t)^{[\alpha]-b} & (\alpha>[\alpha]),\\ O(\nu t)^{\alpha-b-1} & (\alpha=[\alpha]).\end{cases}$$

現在証明下述定理：

定理 1 設$a>-1$，$b>a>-1$，a和b都大于$-1-\alpha$，$\phi(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos nt$，則当

$$\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n=S|C, \alpha|$$

并且积分

$$J(t)=\int_{+0}^{1}u^a(1-u)^b\phi(ut)du\quad(t>0)$$

存在时，$J(t)$ 等于級数 $\sum_{\nu=0}^{\infty}(\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu-1}^\alpha)F_\nu(t,\alpha)$的和，这里 $\sigma_{-1}^\alpha=0$，

$$(\alpha)_n\sigma_n^\alpha=\sum_{k=0}^{n}(\alpha-1)_{n-k}A_k.$$

【証明】 假如 $-1<\alpha\leqslant 0$，那末 $\sum A_n\cos nt$ 均匀地絕对收斂，从而 $J(t)$ 依勒貝格的意义存在．記

$$J_\varepsilon(t)=\int_\varepsilon^1 u^a(1-u)^b\left(1-\frac{\varepsilon}{u}\right)^c\phi(ut)du,$$

則

$$J_\varepsilon(t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nC_\varepsilon(nt;\,a,\,b)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_\varepsilon(nt;\,a,\,b)\sum_{\nu=0}^{n}(-2-\alpha)_{n-\nu}(\alpha)_\nu\sigma_\nu^\alpha.$$

由是可以証明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}J_\varepsilon(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha)F_n(t,\alpha).$$

在一般的情况，当 $\sum|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|<\infty$ 时，从引理 3 知級数

$$S(\varepsilon,\,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha)F_n(\varepsilon,\,t,\,\alpha)$$

絕对收斂．由于 $\sigma_N^\alpha F_N(\varepsilon,\,t,\,\alpha)=o(1)$，所以

$$S(\varepsilon,\,t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sigma_\nu^\alpha\Delta F_\nu(\varepsilon,\,t,\,\alpha)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha)_\nu\sigma_\nu^\alpha\sum_{n=\nu}^{\infty}(-2-\alpha)_{n-\nu}C_\varepsilon(nt),$$

这里 $C_\varepsilon(nt)$是 $C_\varepsilon(nt;\,a,\,b)$的簡写．另一方面，假如 $\lim\limits_{N\to\infty}R_N(\varepsilon,\,t)=0$，那末成立着

$$J_\varepsilon(t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nC_\varepsilon(nt)=\lim_{N\to\infty}\sum_{\nu=0}^{N}(\alpha)_\nu\sigma_\nu^\alpha\sum_{n=\nu}^{N}(-2-\alpha)_{n-\nu}C_\varepsilon(nt)$$

$$=S(\varepsilon,\,t)-\lim_{N\to\infty}R_N(\varepsilon,\,t),$$

这里 $R_N(\varepsilon,\,t)=\sum\limits_{\nu=0}^{N}(\alpha)_\nu\sigma_\nu^\alpha\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}(-2-\alpha)_{n-\nu}C_\varepsilon(nt)$．現在証明

$$\lim_{N\to\infty}R_N(\varepsilon,\,t)=0.$$

設

$$R_N(\varepsilon,\,t)=R_{N1}+R_{N2}=\sum_{\nu=0}^{N}(\alpha)_\nu\sigma_\nu^\alpha\left(\sum_{n=N+1}^{2N}+\sum_{n=2N+1}^{\infty}\right)(-2-\alpha)_{n-\nu}C_\varepsilon(nt),$$

則由引理 1 的(i)，

$$R_{N2}=\sum_{\nu=0}^{N}(\alpha)_\nu\sigma_\nu^\alpha\sum_{n=2N+1}^{\infty}O(n^{-2-\alpha})(nt)^{-1-(a,b)}=O(Nt)^{-1-(a,b)}.$$

設k是区間$[a+1, b+2)$中的最小整数：$a+1\leqslant k<b+2$. 經过k次和差变换，R_{N1}中内部的和$\sum(-2-\alpha)_{n-\nu}C_s(nt)$变成

$$\sum_{n=N+1}^{2N}(-1-\alpha)_{n-\nu}\Delta C_s(nt)-(-1-\alpha)_{N-\nu}C_s(\overline{N+1}\,t)$$
$$+(-1-\alpha)_{2N-\nu}C_s(\overline{2N+1}\,t)$$
$$=\sum_{n=N+1}^{2N}(k-\alpha-2)_{n-\nu}\Delta^k C_s(nt)-\sum_{j=1}^{k}(j-\alpha-2)_{N-\nu}\Delta^{j-1}C_s(\overline{N+1}\,t)$$
$$+\sum_{j=1}^{k}(j-\alpha-2)_{2N-\nu}\Delta^{j-1}C_s(\overline{2N+1}t)$$
$$=\Sigma_1-\Sigma_2+\Sigma_3.$$

利用引理1的(v)，

$$\Sigma_3=\sum_{j=1}^{k}O(N^{j-\alpha-2})\{N^{-j+1}(Nt)^{-1-a}+t^{j-1}(Nt)^{-1-b}\}$$
$$=O(N^{-\alpha-1})\{(Nt)^{-1-a}+(Nt)^{k-2-b}\},$$

从而

$$\sum_{\nu=0}^{N}(\alpha)_\nu\sigma_\nu^\alpha\Sigma_3=\sum_{\nu=0}^{N}O(\nu^\alpha)N^{-1-\alpha}\{(Nt)^{-1-a}+(Nt)^{k-2-b}\}$$
$$=O(Nt)^{-1-a}+O(Nt)^{k-2-b}.$$

其次估計Σ_1. 若$k=\alpha+1$，則$(k-\alpha-2)_{n-\nu}=(-1)_{n-\nu}$，从而$\Sigma_1$等于0. 假如$k>\alpha+1$，那末$-1<k-\alpha-2<0$. 从而

$$(k-\alpha-2)_n>(k-\alpha-2)_{n+1}>0\quad(n=0,1,\cdots).$$

应用引理1，$|\Sigma_1|$不大于

$$(k-\alpha-2)_{N+1-\nu}\max_{0<p\leqslant N}|\Delta^k C_s(\overline{N+1}\,t)+\cdots+\Delta^k C(\overline{N+p}\,t)|$$
$$\leqslant(k-\alpha-2)_{N+1-\nu}\{N^{-k}O(Nt)^{-1-a}+t^k O(Nt)^{-1-b}\}$$
$$<N^{-k}O(Nt)^{-1-a}+t^k O(Nt)^{-1-b}.$$

从而

$$\sum_{\nu=0}^{N}(\alpha)_\nu\sigma_\nu^\alpha\Sigma_1=O(N^{-k+\alpha})\{(Nt)^{-1-a}+(Nt)^{k-1-b}\}.$$

最后从恒等式$\sum_{\nu=0}^{N}(\alpha)_\nu\sigma_\nu^\alpha(\beta)_{N-\nu}=(\alpha+\beta)_N\sigma_N^{\alpha+\beta}$，得到

$$\sum_{\nu=0}^{N}((\alpha)_\nu\sigma_\nu^\alpha\Sigma_2)=\sum_{j=1}^{k}\Delta^{j-1}C_s(\overline{N+1}\,t)\sum_{\nu=0}^{N}(\alpha)_\nu\sigma_\nu^\alpha(j-\alpha-2)_{N-\nu}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}(j-1)_N\,\sigma_N^{j-1}\,\Delta^{j-1}C_s(Nt+t).$$

利用引理1，就得到

$$\sum_{\nu=0}^{N}((\alpha)_\nu\sigma_\nu^\alpha\Sigma_2)=O(Nt)^{-1-a}+O(Nt)^{k-b-2}.$$

相加，得到

$$R_N(\varepsilon,\ t)=O(Nt)^{-1-a}+O(Nt)^{k-b-2},$$

最后两項，关于 ε 是均匀的．由是，当 $N\to\infty$ 时，$R_N(\varepsilon,\ t)$ 匀斂于 0．从而得到等式

$$\lim_{\varepsilon\to+0}J_s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha)F_n(t,\ \alpha).$$

我們还要証明：此式左端等于 $\int_{+0}^{1}u^a(1-u)^b\phi(ut)\,dt$.

設 p 是区間 $(a,\ a+1)$ 中之一正数，則 $\eta=\varepsilon^{1+a-p}>\varepsilon$．由于 $c>0$，由第二中值定理，$(\varepsilon,\ \eta)$ 中有 η' 适合于

$$\int_\varepsilon^\eta u^a(1-u)^b\left(1-\frac{\varepsilon}{u}\right)^c\phi\ (ut)\,du=\left(1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^c\int_{\eta'}^{\eta}u^a(1-u)^b\phi(ut)\,du.$$

由于 $\varepsilon/\eta=\varepsilon^{p-a}$，所以上式当 $\varepsilon\to0$ 时是 $o(1)$．施行分部积分于余下的积分，它变成

$$(1-\varepsilon)^c\int_\eta^1 v^a(1-v)^b\phi(vt)\,dv$$

$$-\int_\eta^1\frac{d}{du}\left(1-\frac{\varepsilon}{u}\right)^c du\int_\eta^u v^a(1-v)^b\,\phi(vt)\,dv.$$

最后的积分等于

$$\int_\eta^1 v^a(1-v)^b\,\phi(vt)\left[(1-\varepsilon)^c-\left(1-\frac{\varepsilon}{v}\right)^c\right]dv$$

$$=\left\{(1-\varepsilon)^c-\left(1-\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^c\right\}\int_\eta^\delta v^a(1-v)^b\,\phi(vt)\,dv,$$

这里 $\eta<\delta<1$．由于 $\{\quad\}$ 中的数，当 $\varepsilon\to0$ 时，是 $o(1)$，所以上式是 $o(1)$．

总結起来,我們得到

$$\lim_{\varepsilon\to0} J(\varepsilon,t)=\lim_{\varepsilon\to0}(1-\varepsilon)^c\int_\eta^1 v^a(1-v)^b\phi(vt)dt$$
$$=\int_{+0}^1 v^a(1-v)^b\phi(vt)dt=J(t).$$

定理1証明完毕.

利用定理1,我們建立有关富理埃級数逐項积分的定理.

定理2 設$\phi(t)\sim\sum A_n\cos nt$,关于某一$\alpha$,$\sum A_n$可用$|C,\alpha|$求和,并且积分$\int_{+0}^\pi\phi(t)t^{-\lambda}dt$存在,那末等式

$$\int_{+0}^\pi\phi(t)g(t)t^{-\lambda}dt=\sum_{n=0}^\infty A_n\int_0^\pi g(t)t^{-\lambda}\cos nt\,dt$$

对于$[0,\pi]$中的任一解析函数$g(t)$成立.这里$\lambda<1$.

【証明】 写着$a=-\lambda$,当$b>k+1$时,对于积分

$$\gamma_n(t)=\gamma_n=\int_0^1 u^{-\lambda}(1-u)^b g(u)\cos(nut)du,$$

利用前面的方法,可証$\Delta^k\gamma_n=O(n^{-k})(nt)^{\lambda-1}$.当$\sum|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|<\infty$时,級数

$$\sum_{\nu=0}^\infty(\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu-1}^\alpha)\sum_{\mu=\nu}^\infty(\alpha)_\mu\sum_{n=\mu}^\infty(-2-\alpha)_{n-\mu}\gamma_n(t)$$

收斂于一个函数$S(t)$,这里$b>\alpha>0$.設

$$\rho_N(t)=\sum_{j=1}^k(j-1)_N\Delta^{j-1}\gamma_{N+1}(t),$$

则$\rho_N(t)=O(Nt)^{-1+\lambda}$.由上节定理2的証明,成立着

$$\sum_{n=0}^N A_n\gamma_n(t)=S(t)-\rho_N(t)+o(1)=S(t)+o(1).$$

当$\varepsilon\to0$时,我們見到

$$\int_0^1 u^{-\lambda}(1-u)^b g(u)\phi(ut)du=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1 u^{-\lambda}(1-u)^b g(u)\phi(ut)du$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\sum_{n=0}^\infty A_n\int_\varepsilon^1 u^{-\lambda}(1-u)^b g(u)\cos(nut)du$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}S_\varepsilon(t),$$

这里的 $S_\varepsilon(t)$ 表示 $S(t)$ 中的 $\gamma_n(t)$ 用

$$\int_\varepsilon^1 u^a(1-u)^b g(u)\cos(nut)du$$

来代替的級数．后者关于 ε 是匀斂的，所以得到

$$\int_{+0}^1 u^{-\lambda}(1-u)^b g(u)\phi(ut)du=S(t).$$

由于 $g(u)$ 的任意性，所以置 $b=0$, $t=1$, 且将上限改为 π，就得到所要的等式．定理証毕．

上面說过，$\sum A_n=s|C,\alpha|$ 并不含有函数 $[\phi(t)]_{1+\alpha}$ 在 $[0,\pi]$ 为有界变差．現在証明

定理 3 假如 $\sum A_n(\theta)=s|C,\alpha|$, $\alpha>-\frac{1}{2}$, 并且积分

$$\int_{+0}^1 t^{-\lambda}\phi(t)dt \quad (\lambda<1-(\alpha))$$

存在，那末函数 $t^{\lambda+\varepsilon}[t^{-\lambda}\phi(t)]_{1+\alpha}$ 在 $[0,\pi]$ 为有界变差，这里

$$f(\theta)\sim\sum A_n(\theta), \quad 2\phi(t)=f(t+\theta)+f(t-\theta), \quad \varepsilon>0.$$

【証明】 設 $\beta\geqslant1+\alpha$, $\lambda=-a$, $\beta-1=b$, 置

$$\Phi(t)=t^\lambda[t^{-\lambda}\phi(t)]_\beta,$$

则 $\Phi(t)=\beta\int_0^1(1-u)^b u^a\phi(ut)du$．要証明的是*)函数

$$\Phi(t)\ (\beta>1+\alpha) \quad 和 \quad \sigma(t)\Phi(t)\ (\beta=1+\alpha)$$

在 $[0,\pi]$ 上为有界变差，这里 $\sigma'(t)$ 和 $t^{-1}\sigma(t)$ 都属于 $L(0,\pi)$．換句話說，我們要証 $\Phi(t)\ (\beta>1+\alpha)$ 以及函数 $t^\lambda\sigma(t)[t^{-\lambda}\phi(t)]_{1+\alpha}$ 的导函数在 $[0,\pi]$ 上可以积分．

由定理 1，我們得到

$$\Phi(t)=\beta\sum_{n=0}^\infty(\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha)F_n(t,\alpha) \quad (\alpha>-1),$$

这里 $\sigma_{-1}^\alpha=0$．利用下面的引理 5:

$$t\frac{d}{dt}F_\nu(t,\alpha)=O(\nu t)^{\alpha-b}+O(\nu t)^{-p} \quad (p>0),$$

*) 这里順便証明 $t^\lambda[t^{-\lambda}\phi(t)]_{1+\alpha+\varepsilon}(\varepsilon>0)$ 在 $[0,\pi]$ 也是有界变差．更一般的定理，載在杭州大学学报 I，第四期．

我們又得

$$\Phi'(t)=\beta\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha)\frac{d}{dt}F_n(t,\alpha).$$

当$\beta>\alpha+1$时,我們見到

$$\int_{\frac{1}{\nu}}^{\pi}\left|\frac{d}{dt}F_\nu(t,\alpha)\right|dt=O(1).$$

假如$\beta\geqslant\alpha+1$, 那末

$$\int_{\frac{1}{\nu}}^{\pi}\left|\sigma(t)\frac{d}{dt}F_\nu(t,\alpha)\right|dt=O(1).$$

当$0\leqslant\nu t\leqslant1$时,我們将証

$$F_\nu(t,\alpha)=O(1),\ \frac{d}{dt}F_\nu(t,\alpha)=O(\nu)(\nu t)^{\min(0,\alpha)},$$

这是引理6. 由是可知

$$\beta\int_0^{\pi}\left|\frac{d}{dt}F_\nu(t,\alpha)\right|dt\quad 和\quad \beta\int_0^{\pi}\left|\sigma(t)\frac{d}{dt}F_\nu(t,\alpha)\right|dt$$

都小于一个常数A. 从而

$$\int_0^{\pi}|\Phi'(t)|dt\leqslant A\sum_{n=0}^{\infty}|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|\quad(\sigma_{-1}^\alpha=0,\ \beta>1+\alpha).$$

从引理3知道,存在正数q适合$F_\nu(t,\alpha)=O(\nu t)^{-q}$, 从而結合$F_\nu(t,\alpha)=O(1)\,(\nu t\leqslant1)$, 我們断言: $F_\nu(t,\alpha)$关于ν和t,是均匀有界.因此,

$$\beta\int_0^{\pi}|\sigma'(t)|\cdot|F_\nu(t,\alpha)|dt\leqslant C.$$

由是

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{d}{dt}[\sigma(t)\Phi(t)]\right|dt\leqslant(A+C)\sum_{n=0}^{\infty}|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|.$$

这就完成了定理3的証明. 現在建立

引理5 設$b\geqslant a$, $1+a>0$, $1+a>(\alpha)$ $((\alpha)=\alpha-[\alpha])$, 則

$$t\frac{d}{dt}F_\nu(t,\alpha)=O(\nu t)^{a-b}+O(\nu t)^{-p}\quad(p>0,\ 0\leqslant t\leqslant\pi).$$

【証明】 首先証明: 当$0>\alpha>-1$, $b\geqslant a$, $a>\alpha$时,

(1) $\rho_\nu(t)\equiv\rho_\nu(t,\alpha)=\sum_{n=\nu}^{2\nu}S_{n-1}(t)\sum_{\mu=\nu}^{n}(\alpha)_\mu(-3-\alpha)_{n-\mu}=O(\nu t)^{-p}$,

这里

$$P=\min(1-\alpha,\ a-\alpha,\ b+1-\alpha),\quad 0<t<\pi,$$

$$S_n(t)=\frac{1}{2}C_0(t)+C_1(t)+\cdots+C_n(t),$$

$$C_n(t)=\int_0^1 u^a(1-u)^b\cos(nut)\,du.$$

由和差变换，$\rho_\nu'(t)=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$；这里，利用引理 2，

$$\begin{aligned}\Sigma_1&=\sum_{n=\nu}^{2\nu}S_{n-1}'(t)\sum_{\mu=\nu+2}^{n}(\alpha-2)_\mu(-1-\alpha)_{n-\mu}\\&=O(t^{-2})(\nu t)^{-L'}\nu^{\alpha-2}\sum_{n=\nu}^{2\nu}\sum_{\mu=\nu+2}^{n}(-1-\alpha)_{n-\mu}\\&=O(t^{-1})(\nu t)^{-1-L'},\ L'=\min(0,\ a,\ b),\end{aligned}$$

$$\Sigma_2=(\alpha-1)_{\nu+1}\sum_{n=\nu}^{2\nu}S_{n-1}'(t)(-1-\alpha)_{n-\nu-1}=O(t^{-1})(\nu t)^{-1-L'},$$

$$\begin{aligned}\Sigma_3&=(\alpha)_\nu\sum_{n=\nu}^{2\nu}S_{n-1}'(t)(-2-\alpha)_{n-\nu}=(\alpha)_\nu\sum_{\mu=0}^{\nu}(-2-\alpha)_\mu S_{\nu+\mu-1}'(t)\\&=(\alpha)_\nu\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(-1-\alpha)_\mu\,\Delta S_{\nu+\mu-1}'(t)+(\alpha)_\nu(-1-\alpha)_\nu S_{2\nu}'(t)\\&=-(\alpha)_\nu\Big(\sum_{\mu\leqslant m}+\sum_{m<\mu<\nu}\Big)(-1-\alpha)_\mu C_{\nu+\mu}'(t)+O(t^{-1})(\nu t)^{-1-L'}.\end{aligned}$$

由于 $(-1-\alpha)_\mu$ 是 μ 的减少函数，$(-\alpha)_\mu$ 是 μ 的增加函数，所以上式右端的第一部分等于

$$\left(\frac{\nu}{m}\right)^\alpha\max_{0<\mu\leqslant\nu}|C_{\mu+\nu}'|+(\alpha)_\nu(-1-\alpha)_m\max_{0<\mu\leqslant\nu}\left|2\sum_{j=0}^{\mu}C_{\nu+j}'\right|.$$

从而，写着 $H=\min(2+a,\ 1+b)$，$t\,\Sigma_3$ 等于

$$O(\nu t)^{-1-L'}+O\left(\frac{\nu}{m}\right)^\alpha\{(\nu t)^{1-1-1}+(\nu t)^{-L'}(mt)^{-1}\}.$$

此結果当 $m=[t^{-1}]$ 时，简化成

$$t\,\Sigma_3=O(\nu t)^{\alpha-L'}.$$

这里我們应該留意 $\alpha-L'=\max(\alpha-a,\ \alpha-b,\ \alpha)\leqslant 0$. 总結起来，

$$t\,\rho_\nu'(t)=O(\nu t)^{\alpha-L'}\quad(\alpha-L'\leqslant 0).$$

同样可以証明 $\rho_\nu(t)=O(\nu t)^{\alpha-L}=O(\nu t)^{-P}$，这里 $P=\min(1-\alpha,\ a+\alpha,\ b+1-\alpha)$.

其次証明

(2) $$t\frac{d}{dt}\left\{F_\nu(t, \alpha)+\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha)_\mu\sum_{n=\mu}^{2\mu}S_{n-1}(t)(-3-\alpha)_{n-\mu}\right\}=O(\nu t)^{-1-L'}.$$

設 $\mu>0$, 則因 $\sum_{n=\mu}^{\infty}(-3-\alpha)_{n-\mu}=0$, 所以

$$\sum_{n=\mu}^{\infty}(-2-\alpha)_{n-\mu}C_\mu(t)=\sum_{n=\mu}^{2\mu}+\sum_{2\mu+1}^{\infty}=g_\mu(t, \alpha+2)+h_\mu(t, \alpha+2)$$
$$=-\sum_{n=\mu}^{\infty}S_{n-1}(t)(-3-\alpha)_{n-\mu}.$$

从而，当 $0<t\leqslant\pi$ 时，

$$\frac{d}{dt}\{g_\mu(t, \alpha+2)+h_\mu(t, \alpha+2)\}$$
$$=-\sum_{n=\mu}^{2\mu}S'_{n-1}(t)(-3-\alpha)_{n-\mu}+\sum_{n=2\mu+1}^{\infty}O(n^{-3-\alpha}t^{-2})(nt)^{-L'}.$$

由于 $F_\nu(t, \alpha)=\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha)_\mu\{g_\mu(t, \alpha+2)+h_\mu(t, \alpha+2)\}$, 所以 (2) 成立.

設 $N>\nu$, 則

$$\sum_{\mu=\nu}^{N}(\alpha)_\mu\sum_{n=\mu}^{2\mu}S_{n-1}(t)(-3-\alpha)_{n-\mu}$$
$$=\rho_\nu(t, \alpha)-\rho_N(t, \alpha)+\sum_{n=2\nu+1}^{2N}S_{n-1}(t)\sum_{2\mu>n}^{n}(\alpha)_\mu(-3-\alpha)_{n-\mu}.$$

从而

$$\sum_{\mu=\nu}^{N}(\alpha)_\mu\sum_{n=\mu}^{2\mu}S'_{n-1}(t)(-3-\alpha)_{n-\mu}$$
$$=\rho'_\nu(t)-\rho'_N(t)+\sum_{n=2\nu+1}^{2N}S'_{n-1}(t)O(n^{-2}).$$

最后的和等于

$$\sum_{n=2\nu+1}^{2N}S'_{n-1}(t)O(n^{-2})=\sum_{n=2\nu+1}^{N}O(nt)^{-2-L'}=O(t^{-1})(\nu t)^{-1-L'}.$$

利用 $\rho_N(t)=o(1)$, (2)簡化成为

(3) $$t\frac{d}{dt}\{F_\nu(t, \alpha)+\rho_\nu(t, \alpha)\}=O(\nu t)^{-1-L'}\quad(0\leqslant t\leqslant\pi).$$

假如 $\alpha-L'=\max(\alpha-a, \alpha-b, \alpha)<0$, 那末从 $\rho'_\nu(t)$的估計，等式(3)完成了引理 5 的証明.

至于等式(3)，是在 $\rho_N(t, \alpha)=o(1)\ (N\to\infty)$ 的基础上成立的. 現

在从(3)出发，以下面的步驟来完成引理5的証明[$\rho_N=o(1)$的証明，移在后面]：

(i) 当α为正整数或0时，$t\rho_\nu'(t)=O(\nu t)^{\alpha-b}+O(\nu t)^{-1-\alpha}$，但$\nu t\geqslant 1$.

(ii) $t\rho_\nu'(t)=O(\nu t)^{\alpha-b}+O(\nu t)^{-P}\quad(P>0,\ \nu t\geqslant 1)$.

要証明(i)，将$\rho_\nu(t)$改写如下．記$A_\mu=\sum_{n=\mu}^{2\nu}(-3-\alpha)_{n-\mu}S_{n-1}(t)$，則

$$\begin{aligned}\rho_\nu(t,\alpha)&=\sum_{n=\nu}^{2\nu}S_{n-1}(t)\sum_{\mu=\nu}^{n}(\alpha)_\mu(-3-\alpha)_{n-\mu}\\&=\sum_{\mu=\nu}^{2\nu}(\alpha)_\mu\sum_{n=\mu}^{2\nu}(-3-\alpha)_{n-\mu}S_{n-1}(t)\\&=\sum_{\mu=\nu}^{2\nu}(\alpha)_\mu A_\mu=\sum_{\mu=\nu}^{2\nu}(\alpha-1)_\mu(A_\mu+A_{\mu+1}+\cdots+A_{2\nu})\\&\quad+\sum_{\mu=\nu}^{2\nu}A_\mu\Big[(\alpha)_{2\nu}-\sum_{\mu=\nu}^{2\nu}(\alpha-1)_\mu\Big]\\&=\sum_{\mu=\nu}^{2\nu}(\alpha-1)_\mu\sum_{n=\mu}^{2\nu}(-2-\alpha)_{n-\mu}S_{n-1}(t)+(\alpha)_{\nu-1}(A_\nu+\cdots+A_{2\nu})\\&=\rho_\nu(t,\alpha-1)+(\alpha)_{\nu-1}(A_\nu+\cdots+A_{2\nu}).\end{aligned}$$

由于$A_\nu+\cdots+A_{2\nu}$等于

$$\begin{aligned}(4)\qquad\sum_{n=\nu}^{2\nu}S_{n-1}\sum_{j=\nu}^{n}(-3-\alpha)_{n-j}&=\sum_{n=\nu}^{2\nu}S_{n-1}(-2-\alpha)_{n-\nu}\\&=-\sum_{n=\nu}^{2\nu}C_n(t)(-1-\alpha)_{n-\nu}+(-1-\alpha)_\nu S_{2\nu}\\&=-\sum_{n=\nu}^{2\nu}(k-\alpha-1)_{n-\nu}\Delta^k C_n-\sum_{j=0}^{k-1}(j-\alpha)_\nu\Delta^j C_{2\nu+1}\\&\quad+(-1-\alpha)_\nu S_{2\nu}.\end{aligned}$$

由于$\alpha=[\alpha]\geqslant 0$，所以当$n\geqslant\alpha$时，$(-\alpha)_n=0$．因此，从上式得到

$$A_\nu+\cdots+A_{2\nu}=-\Delta^\alpha C_\nu(t)\quad(\nu>\alpha).$$

从而

$$\rho_\nu(t,\alpha)=\rho_\nu(t,0)-\sum_{j=0}^{\alpha}(j)_{\nu-1}\Delta^j C_\nu(t)=-\sum_{j=0}^{\alpha}(j)_{\nu-1}\Delta^j C_\nu(t).$$

由是得到

$$\frac{d\rho_\nu(t,\alpha)}{dt}=\sum_{j=0}^{\alpha}O(\nu^j)(\nu t^j)\{(\nu t)^{-1-b}+(\nu t)^{-\alpha-2-j}\},$$

$$t\frac{d\rho_\nu(t,\alpha)}{dt}=O(\nu t)^{\alpha-b}+O(\nu t)^{-a-1}.$$

这就証明了(i).

在(ii)的情况, $\alpha>[\alpha]\geqslant 0$. 此时有如下的整数$k$:

$$0<\alpha<k<\alpha+1.$$

設$0<m\leqslant\nu$, 写着$n-\nu=j$, 那末

$$\sum_{n=\nu}^{2\nu}(k-\alpha-1)_{n-\nu}\Delta^k C'_n(t)=\sum_{j=0}^{m}+\sum_{j=m+1}^{\nu}(k-\alpha-1)_j\Delta^k C'_{\nu+j}(t)$$
$$=\Sigma_1+\Sigma_2.$$

由于$-1<k-\alpha-1<0$, 所以

$$|\Sigma_1|\leqslant(k-\alpha)_m\max_{0<j<\nu}|\Delta^k C'_{\nu+j}(t)|,$$

$$|\Sigma_2|\leqslant(k-\alpha-1)_m\max_{m<N\leqslant\nu}\left|\sum_{j=m+1}^{N}\Delta^k C'_{\nu+j}(t)\right|.$$

应用引理1, 我們見到

$$\Sigma_1+\Sigma_2=O(m^{k-\alpha})\nu t^k\{(\nu t)^{-H_k}+(mt)^{-1}(\nu t)^{-H_{k-1}}\},$$

这里$H_k=\min(1+b,\ a+k+2)$. 現在依b的大小分別选取m而估計$\Sigma_1+\Sigma_2$如下:

当$b\leqslant k+a+1$时, 取$m=[t^{-1}]$, 那末

$$t(\alpha)_{\nu-1}(\Sigma_1+\Sigma_2)=O(\nu t)^{\alpha-b}+O(\nu t)^{\alpha-k-a}.$$

假如$b>k+a+1$, 那末取$m=\nu$而得

$$t(\alpha)_{\nu-1}(\Sigma_1+\Sigma_2)=O(\nu t)^{-1-a}.$$

总結起来, 由于$1+a\geqslant(\alpha)$, 我們得到

$$t(\alpha)_{\nu-1}(\Sigma_1+\Sigma_2)=O(\nu t)^{\alpha-b}+O(\nu t)^{-(\alpha)}.$$

記

$$K_j=\min(1+b,\ a+j+2),$$

从等式

$$t(\alpha)_{\nu-1}\left[\sum_{j=\nu}^{2\nu}A'_j(t)-\Sigma_1-\Sigma_2\right]$$
$$=-t(\alpha)_{\nu-1}\left\{\sum_{j=0}^{k-1}(j-\alpha)_\nu\Delta^j C'_{2\nu+1}(t)-(-1-\alpha)_\nu S'_{2\nu}(t)\right\},$$

得到

$$t(\alpha)_{\nu-1}\sum_{j=\nu}^{2\nu}A_j'(t)=O(\nu t)^{a-b}+O(\nu t)^{-(\alpha)}+\sum_{j=0}^{k-1}O(\nu^{j-\alpha}\cdot\nu^{\alpha}t)\nu t^j(\nu t)^{K_j}$$

$$+t^{-1}\nu^{\alpha}(\nu^{-1-\alpha})(\nu t)^{-L'}$$

$$=O(\nu t)^{a-b}+O(\nu t)^{-(\alpha)}+O(\nu t)^{k-b-1}=O(\nu t)^{-\min[(\alpha),\ b-a]}.$$

又从等式 $\rho_\nu(t,\ \alpha)=\rho_\nu(t,\ \alpha-1)+(\alpha)_{\nu-1}(A_\nu+\cdots+A_{2\nu})$ 知道

$$t\frac{d\rho_\nu(t,\ \alpha)}{dt}=t\frac{d\rho_\nu(t,\ (\alpha)-1)}{dt}+O(\nu t)^{a-b}+O(\nu t)^{-p}\quad(p>0)$$

$$=O(\nu t)^{a-b}+O(\nu t)^{-p}\ [\text{参見}(3)],$$

这就完成了 (ii) 的証明. 引理 5 的証明通过下面的引理 6 来完成. 建立了引理 6, 引理 5 的証明完毕.

引理 6 假如 $b\geqslant a$, 那末有正的常数 P 适合于

$$\rho_\nu(t,\ \alpha)=O(\nu t)^{-P}.$$

【証明】 当 $(\alpha)>0$ 时, 从 (4) 得到

$$(\alpha)_{\nu-1}\sum_{j=\nu}^{2\nu}A_j=\max_{\nu\leqslant n\leqslant 2\nu}|\Delta^k C_n|O(\nu^k)+\max_{0\leqslant j<k}O(\nu^j|\Delta^j C_{2\nu+1}|)+O(\nu^{-1})S_{2\nu}$$

$$=O(\nu t)^{-1-a}+O(\nu t)^{-2}+O(\nu t)^{k-1-b}.$$

我們已經知道: 当 $-1<\alpha<0$ 时,

$$\rho_\nu(t,\ \alpha)=O(\nu t)^{-P},\ P=\min(1+a,\ 1+b,\ 2).$$

因此, 从 $\rho_\nu(t,\ \alpha)=\rho_\nu(t,\ (\alpha)-1)+O(\nu t)^{-1-a}+O(\nu t)^{k-1-b}+O(\nu t)^{-2}$, 得到

$$\rho_\nu(t,\ \alpha)=O(\nu t)^{-1-a}+O(\nu t)^{k-1-b}+O(\nu t)^{-2}=O(\nu t)^{-P},$$

这里 $P=\min(2,\ 1+a,\ 1+b-k)>0$.

假如 $(\alpha)=0$, 那末 $\rho_\nu(t,\ \alpha)=-\sum_{j=0}^{\alpha}(j)_{j-1}\Delta^j C_\nu(t)$. 从而

$$\rho_\nu(t,\ \alpha)=O(\nu t)^{-1-a}+O(\nu t)^{\alpha-1-b}.$$

証明完毕.

定理 3 的証明用到 $F_\nu(t,\ \alpha)$ 当 $\nu t\leqslant 1$ 时的性质, 現在建立如下的

引理 7 設 $b\geqslant a>-1, a>-1$, a 和 b 都大于 $-1-\alpha$, $0\leqslant\nu t\leqslant 1$, 則

$$F_\nu(t,\ \alpha)=O(1),\quad \frac{d}{dt}F_\nu(t,\ \alpha)=O(\nu)(\nu t)^{\min(0,\alpha)}.$$

【証明】 首先估計 $F'_\nu(t,\alpha)$. 对于函数 $\phi(t)\equiv1$ 的富理埃級数，从定理1的等式

$$\int_0^1 u^a(1-u)^b\phi(ut)\,du=\sum_0^\infty(\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu-1}^\alpha)F_\nu(t,\alpha)$$

得到

$$F_0(t,\alpha)=\int_0^1 u^a(1-u)^b\,du\equiv C_0(t).$$

从而 $\dfrac{d}{dt}F_0(t,\alpha)=0$. 或是

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=0}^\infty(\alpha)_\mu\sum_{n=\mu}^\infty(-2-\alpha)_{n-\mu}C_n(t)=0.$$

由是

$$\frac{d}{dt}F_\nu(t,\alpha)=-\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha)_\mu\sum_{n=\mu}^\infty(-2-\alpha)_{n-\mu}C'_n(t).$$

假如 $\alpha=[\alpha]\geqslant0$, 那末上式可以写成

$$\frac{d}{dt}F_\nu(t,\alpha)=-\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha)_\mu\Delta^{\alpha+1}C'_\mu(t).$$

此式是 $\sum\limits_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha)_\mu O(\mu t^{\alpha+1})=O(\nu^{\alpha+2}t^{\alpha+1})=O(\nu)$. 从而得到

$$F'_\nu(t,\alpha)=O(\nu).$$

其次考虑 $\alpha>[\alpha]\geqslant0$ 的情况. 我們見到

$$\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha)_\mu\sum_{n=2\mu+1}^\infty(-2-\alpha)_{n-\mu}C'_n(t)=\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha)_\mu\sum_{n=2\mu+1}^\infty O(n^{-1-\alpha})=O(\nu),$$

$$\sum_{n=\mu}^{2\mu}(-2-\alpha)_{n-\mu}C'_n(t)$$

$$=\sum_{n=\mu}^{2\mu}([\alpha]-\alpha)_{n-\mu}\Delta^{2+[\alpha]}C'_n(t)+\sum_{j=0}^{[\alpha]+1}(j-\alpha-1)_\mu\Delta^jC'_{2\mu+1}(t)$$

$$=O(\mu^{-\alpha})(\mu t)^{2+[\alpha]}+O(\mu^{-\alpha})\sum_{j=0}^{[\alpha]+1}(\mu t)^j=O(\mu^{-\alpha}),$$

实际上，当 $0<\mu t\leqslant\nu t\leqslant1$ 时，$\Delta^kC'_n(t)=O(n)t^k$. 由是

$$\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha)_\mu\sum_{n=\mu}^{2\mu}(-2-\alpha)_{n-\mu}C'_n(t)=\sum_{\mu=0}^{\nu-1}O(1)=O(\nu).$$

結合起来，得到

$$\frac{d}{dt}F_\nu(t, \alpha)=O(\nu).$$

最后考虑 $\alpha<0$ 的情况. 写着 $S_{-1}=\frac{1}{2}C_0$, 当 $\nu\geqslant 0$ 时,

$$F_\nu(t, \alpha)=-\sum_{\mu=\nu}^{\infty}(\alpha)_\mu\sum_{n=\mu}^{\infty}(-3-\alpha)_{n-\mu}S_{n-1}(t).$$

利用 $F_0'=0$, 我們得到

$$\frac{d}{dt}F_\nu(t, \alpha)=\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha)_\mu\sum_{n=\mu}^{\infty}(-3-\alpha)_{n-\mu}S_{n-1}'(t)=S_1+S_2.$$

由于

$$\sum_{2\mu+1}^{\infty}(-3-\alpha)_{n-\mu}S_{n-1}'(t)=\sum_{2\mu+1}^{[1/t]}O(n^{-3-\alpha}n^2)+\sum_{[1/t]+1}^{\infty}O(n^{-3-\alpha}t^{-2})=O(t^{\alpha}),$$

所以

$$\begin{aligned}S_2&=\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha)_\mu\sum_{n=2\mu+1}^{\infty}(-3-\alpha)_{n-\mu}S_{n-1}'(t)\\&=\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha)_\mu O(t^{\alpha})=\sum_{\mu=0}^{\nu-1}O(\mu t)^{\alpha}=O(\nu)(\nu t)^{\alpha}.\end{aligned}$$

又因

$$\begin{aligned}S_1&=\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha)_\mu\sum_{n=\mu}^{2\mu}(-3-\alpha)_{n-\mu}S_{n-1}'(t)\\&=\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha)_\mu\Big\{-\sum_{m=0}^{\mu-1}(-1-\alpha)_m\Delta C_{m+\mu}'(t)-(-1-\alpha)_\mu C_{2\mu}'(t)\\&\quad+(-2-\alpha)_\mu S_{2\mu}'(t)\Big\},\end{aligned}$$

注意到 $S_n'(t)=O[\min(n^2, t^{-2})]$, $C_n'(t)=O(n)$; 当 $\nu t\leqslant 1$ 时,

$$\Delta C_n'(t)=(n+1)\Delta C_{n+1}(t)+O(1)=O(1),$$

就知道上式等于

$$\sum_{\mu=1}^{\nu}(\alpha)_\mu\Big\{\sum_{m=0}^{\mu-1}(-1-\alpha)_m O(1)+O(\mu^{-\alpha})\Big\}=O(\nu).$$

因此, 当 $\alpha>-1$ 时,

$$\frac{d}{dt}F_\nu(t, \alpha)=O(\nu)(\nu t)^{\min(0, \alpha)}.$$

由积分卽得 $F_\nu(t, \alpha)=O[(\nu t)^{1+\min(0, \alpha)}]=O(1)$. 引理 7 証毕. 定理 3 的証明至此完成.

8. 加强絕对平均法 $l|C, \alpha|$ [*]

波山桂(Bosanquet)于1936年曾举例指出[倫敦数学会期刊 J. L. M. S. 11]：富理埃級数的絕对收斂点未必是一个伐賴普山的收斂点，这就是說：$\sum|\sigma_n^{(0)}-\sigma_{n-1}^{(0)}|<\infty$ 并不含有 $[\phi(t)]_1$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$ 是一有界变差函数．本节証明：取适当的 $l=\{l_n\}$ $(l_n\to\infty)$，当 $\sum l_n|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|<\infty$ 时，函数 $[\phi(t)]_{1+\alpha}$ 在 $[0, \pi]$ 上是有界变差．假如 $l_n<l_{n+1}$, $l_n\to\infty$，那末当 $\mathfrak{S}[f; x]$ 的蔡查罗平均 $\sigma_n(x)=\sigma_n$ 适合

$$\sum l_\nu|\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu-1}^\alpha|<\infty$$

时，我們說：$\mathfrak{S}[f]$ 在点 x，可用加强絕对平均法 $l|C, \alpha|$ 求和．簡記做极限 $\{l_\nu\}-\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^\alpha$ 存在，或是 $\mathfrak{S}(f; x)=f(x)\,(l|C, \alpha|)$．

定理 1 假如 $\{\log\nu\}-\lim\sigma_n^\alpha(x)$ 存在，$\alpha>-\dfrac{1}{2}$，那末当积分

$$\int_{+0}^1 t^{-\lambda}\phi(t)\,dt \quad (\lambda<1-(\alpha))$$

存在时，函数 $t^\lambda[t^{-\lambda}\phi(t)]_{1+\alpha}$ 在区間 $[0, \pi]$ 上是有界变差，从而 x 是 f 的一个伐賴普山的收斂点．

【証明】 我們見到

$$\Phi(t)\equiv t^\lambda[t^{-\lambda}\phi(t)]_{1+\alpha}=(1+\alpha)\int_0^1(1-u)^b u^a\phi(ut)\,du,$$

这里 $a=-\lambda$, $b=\alpha$．我們要用前节中的各种記号以及下面的結果——(1)和(2)：

$$(1)\qquad \begin{cases} F_\nu(t, \alpha)=O(\nu t)^{-p}\ (p>0),\ F_\nu(t, \alpha)=O(1) & (0\leqslant\nu t\leqslant1),\\ tF'_\nu(t, \alpha)=O(1),\ F'_\nu(t, \alpha)=O(\nu)(1+(\nu t)^\alpha) & (0<\nu t\leqslant1). \end{cases}$$

如果 $\sum|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|$ 收斂，那末

$$(2)\qquad \Phi(t)=\sum_{\nu=0}^\infty(\alpha+1)(\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu-1}^\alpha)F_\nu(t, \alpha)\quad(\sigma_{-1}^\alpha=0).$$

从(1)中的 $F'_\nu(t, \alpha)=O(t^{-1})$，我們見到

$$\Phi'(t)=\sum_{\nu=0}^\infty(\alpha+1)(\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu-1}^\alpha)\frac{\partial}{\partial t}F_\nu(t, \alpha),$$

---

[*] 本节参見科学記录，第一卷，第三期(1945)，290—300．

事实上，$\sum|\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu-1}^\alpha|<\infty$. 再利用(1)，从

$$\int_0^\pi\left|\frac{\partial F_\nu(t,\alpha)}{\partial t}\right|dt=\int_0^{\frac{1}{\nu}}O\left(\nu(1+\nu t)^\alpha\right)dt+\int_{\frac{1}{\nu}}^\pi O(t^{-1})dt=O(\log\nu)$$

得到

$$\int_0^\pi|\Phi'(t)|dt\leqslant\sum_{\nu=0}^\infty|\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu-1}^\alpha|O(\log\nu)<\infty.$$

証明完毕.

定理 1 可以拓广成如下的形式.

定理 2 設 $\alpha>-\dfrac{1}{2}$, $p>1$, 假如

$$\sum|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|(\log n)^p<\infty,\quad \sigma_n^\alpha=o(1),$$

那末，当积分

$$\int_{+0}^1 t^{-\lambda}\phi(t)dt\quad(0\leqslant\lambda<1-(\alpha))$$

存在时，函数

$$|\log t|^{p-1}t^\lambda[t^{-\lambda}\phi(t)]_{1+\alpha}$$

在区間$[0,\pi]$上是有界变差.

証明需要下面的引理.

引理 1 設 $-a=\lambda<1$, $b\geqslant\alpha>-1$, a 和 b 都大于 $-1-\alpha$, 則当 $0<\nu t\leqslant1$ 时，

$$F_\nu(t,\alpha)=B(1+a,1+b)+O(\nu t)^{\alpha+1}.$$

加上条件 $\lambda\leqslant1-(\alpha)$ 和 $p\geqslant1$, 則得

$$\int_0^\pi|\log t|^{p-1}\left|\frac{d}{dt}F_\nu(t,\alpha)\right|dt=O((\log\nu)^p).$$

【証明】 从恒等式 $F_0(t,\alpha)\equiv C_0(t)$ 得到

$$F_\nu(t,\alpha)=C_0(t)-\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha)_\mu\sum_{n=\mu}^\infty(-2-\alpha)_{n-\mu}C_n(t),$$

这里

$$C_0(t)=\int_0^1 u^a(1-u)^b\,du=B(1+a,1+b).$$

設 $n>2t^{-1}$, 由于

$$1>(n-\mu)n^{-1}>1-\frac{\nu t}{2}\geqslant\frac{1}{2},\ 和\ \sum(-2-\alpha)_{n-\mu}C_n(t)$$

的絕对值不大于

$$C_0(t)\sum|(-2-\alpha)_{n-\mu}|=O(\sum n^{-2-\alpha})=O(t^{1+\alpha}).$$

記 $\sum(-2-\alpha)_{n-\mu}C_n(t)$ 对于 $\mu\leqslant n\leqslant 2t^{-1}$ 的和为 $R_\mu(t)$，我們得到

$$F_\nu(t,\alpha)=C_0(t)-\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha)_\mu R_\mu(t)+O(\nu t)^{1+\alpha}.$$

假如 $\alpha=[\alpha]$，那末当 $t^{-1}>\alpha+1$ 时，

$$R_\mu(t)=\Delta^{\alpha+1}C_\mu(t)=O(t^{1+\alpha})\quad（見前节）.$$

此結果当 $t^{-1}\leqslant\alpha+1$ 时也成立；事实上，在 $t^{-1}\leqslant n\leqslant\alpha+1$ 上的和

$$\sum|(-2-\alpha)_{n-\mu}|=O(\sum t^{2+\alpha})=O(t^{1+\alpha}).$$

由是，当 $0<\nu t\leqslant 1$ 时，

$$\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha)_\mu R_\mu(t)=O(\nu t)^{\alpha+1}.$$

假如 α 不是整数，那末写着 $[t^{-1}]=T_1$，$\left[\frac{2}{t}\right]=T_2$，施行和差变换，得到

$$\begin{aligned}R_\mu(t)&=\sum_{m=0}^{T_2-\mu}(-2-\alpha)_m C_{\mu+m}(t)\\&=\sum_{m=0}^{T_2-\mu}([\alpha]-\alpha)_m\Delta^{[\alpha]+2}C_{\mu+m}(t)+\sum_{j=0}^{[\alpha]+1}(j-1-\alpha)_{T_2-\mu}\Delta^j C_{T_2}(t)\\&=\sum_{m=0}^{T_1}+\sum_{m=T_1+1}^{T_2-\mu}([\alpha]-\alpha)_m\Delta^{[\alpha]+2}C_{\mu+m}(t)+O(t^{\alpha+1})=O(t^{\alpha+1}).\end{aligned}$$

总結起来，就得到 $F_\nu(t,\alpha)=B(1+a,1+b)+O(\nu t)^{\alpha+1}$.

当 $p\geqslant 1$ 时，有 t_p 使不等式 $\frac{1}{2}<1+\frac{p-1}{\log t}\leqslant 1$ 在区間 $0<t\leqslant t_p$ 上成立．由是在 $(0,t_p)$ 上，成立着

$$\frac{1}{2t}\int_0^t\left(\log\frac{1}{u}\right)^{p-1}du<\frac{1}{t}\int_0^t\left(\log\frac{1}{u}\right)^{p-1}\left(1+\frac{p-1}{\log u}\right)du=\left(\log\frac{1}{t}\right)^{p-1}.$$

由于 $F'_\nu(t,\alpha)=O[\min(\nu(1+(\nu t)^\alpha),t^{-1})]$，所以

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi|\log t|^{p-1}|F'_\nu(t)|\,dt\\&=\int_0^{\frac{1}{\nu}}+\int_{\frac{1}{\nu}}^\pi=O(\nu)\int_0^{\frac{1}{\nu}}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{p-1}[1+(\nu t)^\alpha]dt+O\left(\int_{\frac{1}{\nu}}^\pi|\log t|^{p-1}\frac{dt}{t}\right)\\&=O(\log\nu)^{p-1}+O(\log\nu)^p=O(\log\nu)^p.\end{aligned}$$

引理 1 証毕。

【定理 2 的証明】 首先証明

$$\lim_{t\to+0}|\log t|^{p}\cdot t^{\lambda}[t^{-\lambda}\phi(t)]_{1+\alpha}=0.$$

写着 $\Phi(t)=\Phi_1(t)+\Phi_2(t)$, $[t^{-1}]=T$, 这里

$$\Phi_2(t)=\sum_{n=T+1}^{\infty}(\alpha+1)(\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha)F_n(t,\alpha),$$

$$|\Phi_2(t)|\leqslant K|\log t|^{-p}\sum_{n=T+1}^{\infty}|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|(\log n)^p=o\left(\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-p}\right).$$

利用引理 1,

$$\Phi_1(t)=(\alpha+1)\sum_{n=0}^{T}(\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha)[C_0(t)+O(nt)^{\alpha+1}]$$

$$=(\alpha+1)C_0(t)\sigma_T^\alpha+\sum_{n=0}^{T}(\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha)O(nt)^{\alpha+1}.$$

由假設 $\sigma_n^\alpha=o(1)$, 因此 $\sigma_T^\alpha=\sum_{n=T+1}^{\infty}(\sigma_{n-1}^\alpha-\sigma_n^\alpha)$. 从而

$$|\log t|^p|\sigma_T^\alpha|\leqslant\sum_{n=T+1}^{\infty}|\sigma_{n-1}^\alpha-\sigma_n^\alpha|(\log n)^p=o(1).$$

置 $\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]=\tau$, 則

$$\sum_{n=0}^{T}|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|(nt)^{\alpha+1}=\sum_{n=0}^{\tau}+\sum_{n=\tau+1}^{T}|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|(nt)^{\alpha+1}$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{\tau}|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|(\tau t)^{\alpha+1}+\sum_{n=\tau+1}^{T}|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|$$

$$\leqslant O(\sqrt{t})^{\alpha+1}+|\log\tau|^p\sum_{n=\tau+1}^{T}|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|(\log n)^p$$

$$\leqslant o(|\log t|^p)\quad(t\to0).$$

两者結合, 得到 $\Phi_1(t)=o(|\log t|^{-p})$. 从而

$$\lim_{t\to0}(\log t)^p\Phi(t)=\lim_{t\to0}(\log t)^p(\Phi_1(t)+\Phi_2(t))=0.$$

利用这个結果, 就可以証 $l(t)\Phi(t)$ 在 $(0,\pi)$ 上是一有界变差函数, 但 $l(t)=|\log t|^{p-1}$. 所要証明的是

$$\int_0^\pi\left|\frac{d}{dt}l(t)\Phi(t)\right|dt<\infty.$$

首先由引理 1 以及 $\sum|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|l(n)<\infty$, 我們見到

$$\frac{1}{\alpha+1}\int_0^\pi |l(t)\Phi'(t)|dt \leqslant \sum|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha|\int_0^\pi \left|l(t)\frac{d}{dt}F_n(t,\alpha)\right|dt<\infty.$$

其次,由于$l'(t)<0(0<t<1)$,所以——$0<\varepsilon<1$的話,

$$\int_\varepsilon^1 |l'(t)\Phi(t)|dt=-l(t)|\Phi(t)|\Big|_\varepsilon^1+\int_\varepsilon^1 l(t)\frac{d}{dt}|\Phi(t)|dt.$$

当$\varepsilon\to 0$时第一項趋近于$0(l(1)=0)$,因此

$$\int_0^1 |l'(t)\Phi(t)|dt<\infty.$$

从而$[l(t)\phi(t)]'\in L(0,\pi)$. 定理2証毕.

9. 富理埃級数在 |C| 可求和的点

前面許多定理,都假設着具有形式

$$J(t)=\int_{+0}^1 u^{-\lambda}\phi(ut)du \quad (0<\lambda<1)$$

的积分依柯西意义存在,而建立如下的等式:$J(t)=S(t)$. 这里$S(t)$是一个級数,$S(t)$的收斂只靠着富理埃級数在一定点的$|C|$可求和,而并不需要$J(t)$怎样存在的情况. 总的看来,級数的和等于某一积分的值. 下述定理中的积分是有“代表性”的.

定理 設$\mathfrak{S}[f]$在点θ可用$|C|$求和,那末当$\lambda<1$时,极限

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^\pi t^{-\lambda}[f(\theta+t)+f(\theta-t)]\left(1-\frac{\varepsilon}{t}\right)^c dt$$

对于足够大的正数c存在. 当$\mathfrak{S}[f;\theta]$用$|C,\alpha|$可求和时,取$c>1+\alpha$就好了.

【証明】 于§7引理4中的$\mathscr{C}_s(x;a,b)$,写入

$$a=-\lambda, \qquad \mathrm{cs}(xu)=\cos(xu).$$

假如

$$\mathfrak{S}[f;\theta]=\sum A_n(\theta), \qquad \sum A_n(\theta)=S|C,\alpha|,$$

那末我們得到

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 u^{-\lambda}\chi(u)\left(1-\frac{\varepsilon}{u}\right)^c\phi(ut)du=\sum_{\nu=0}^\infty(\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu-1}^\alpha)\mathscr{F}_\nu(t,\alpha).$$

利用§7引理4以及所設的条件$\sum|\sigma_\nu^\alpha-\sigma_{\nu-1}^\alpha|<\infty$,上式右端是

一收斂級数. 置 $t=1$ 就知道所要的极限存在. 定理証毕.

10. 負数級的求和法 $|C, -\alpha|$ $(0<\alpha<1)$

首先引入一个簡单的判别法.

定理 1 假如 $\phi(t)$ 和 $t\phi'(t)$ 在 $[0, \pi]$ 上都是有界变差函数, 那末当 $\alpha>-1$ 时,

$$\mathfrak{S}[f; x]=S|C, \alpha|.$$

【証明】 由于 $t\phi'(t)$ 是有界变差,所以成立着等式

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{u^p \phi(u)\,du}{(t-u)^p}=\int_0^1 \frac{v^p(\phi(tv)+vt\phi'(tv))}{(1-v)^p}\,dv,$$

但 $0<p<1$. 这个函数可以写成

$$t^{-p}[t^p\phi(t)]_{-p},$$

它在 $[0, \pi]$ 上是有界变差的, $\phi(t)$ 和 $t\phi'(t)$ 都是这样的話. 由是我們只要建立下面的定理就好了.

定理 2 設 $0<\alpha<1, q\geqslant\alpha$, 假如函数 $t^{-q}[t^q\phi(t)]_{-\alpha}$ 在区間 $[0, \pi]$ 为有界变差,那末当 $\varepsilon>0$ 时,

$$\mathfrak{S}[f; x]=S|C, -\alpha+\varepsilon|.$$

【証明】 两个函数 $t^{q-\alpha}$ 和

$$\psi(t)\equiv t^{-q}[t^q\phi(t)]_{-\alpha}=t^{\alpha-q}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{u^q\phi(u)}{(t-u)^\alpha}du$$

都是有界变差,他們的乘积

$$\Gamma(1-\alpha)(t^q\phi(t))_{-\alpha}=\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{u^q\phi(u)}{(t-u)^\alpha}du=t^{q-\alpha}\psi(t)$$

在 $[0, \pi]$ 上也是有界变差. 在这个基础上,成立着等式

$$\phi(t)\doteq((t^q\phi(t))_{-\alpha})_\alpha t^{-q}.$$

此关系可从下述引理导出.

引理 設 $0<\alpha<1$, $(h(t))_{1-\alpha}$ 的导函数在 $(0, T)$ 上是有界, 那末 $(h(t))_\alpha$ 等价于 $\mathrm{Lip}\,\alpha$ 中的一个函数, 并且 $((h(t))_{-\alpha})_\alpha$ 几乎处处等于 $h(t)$ $(0<t<T)$.

【引理的証明】 导函数 $(h(t))'_{1-\alpha}=g(t)$ 的絕对值小于一个常数 A,

当 $0\leqslant t<t'\leqslant T$ 时，

$$|(h(t))_{1-\alpha}-(h(t'))_{1-\alpha}|\leqslant A(t'-t).$$

由是可知$(h(t))_{1-\alpha}$ 在 $[0, T]$ 是全連續的，有界函数 $g(t)$ 的$(g(t))_\alpha$ 是連續的．由是，从

$$(h(t))_{1-\alpha}=\int_0^t g(v)dv=((g(t))_\alpha)_{1-\alpha}$$

得到 $h(t)\doteq(g(t))_\alpha$，或是 $h(t)\doteq((h(t))_{-\alpha})_\alpha$．設 $0<t<t'$，則

$$\Gamma(\alpha)\{(h(t'))_\alpha-(h(t))_\alpha\}$$
$$=\int_0^t\{(t'-v)^{\alpha-1}-(t-v)^{\alpha-1}\}h(v)dv+\int_t^{t'}(t'-v)^{\alpha-1}h(v)dv.$$

函数 $h(t)$ 等价于連續函数 $(g(t))_\alpha$，它的絕对值概小于一个常数 $\Gamma(\alpha)B$．当 $t'>t$ 时，

$$|(h(t'))_\alpha-(h(t))_\alpha|\leqslant B\{t'^\alpha-t^\alpha+2(t'-t)^\alpha\}\leqslant 3B(t'-t)^\alpha.$$

引理証毕，从而关于 $\phi(t)$ 的等式成立．

設 $-\alpha<\beta<0$，作函数

$$Z_\beta(w)=\int_0^w u^{q-\alpha}\int_u^\pi(t-u)^{\alpha-1}t^{-q}\frac{d}{dt}g_n(t, \beta)dt\,du.$$

我們見到

$$\tau_n^\beta=\int_0^\pi((t^q\phi(t))_{-\alpha})_\alpha t^{-q}\frac{d}{dt}g_n(t, \beta)dt$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\pi w^{\alpha-q}(w^q\phi(w))_{-\alpha}dZ_\beta(w)$$
$$=-\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\pi Z_\beta(w)d\psi(w),$$

事实上，$Z_\beta(\pi)=0$（見下文）．由于

$$\frac{d}{dt}g_n(t, \beta)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{(\beta)_n}\sum_{\nu=1}^n(\beta-1)_{n-\nu}\nu\cos\nu t,$$

所以要証 $Z_\beta(\pi)=0$，只要証明，当 n 是正整数时，

$$\int_0^\pi u^{q-\alpha}\int_u^\pi(t-u)^{\alpha-1}t^{-q}\cos nt\,dt\,du=0.$$

左边等于

$$B(\alpha, q-\alpha+1)\int_0^\pi\cos nt\,dt=0$$

从而上式成立.

要估計 τ_n^β, 首先証明: $Z_\beta(w)=O(nw)^{-\beta}(1+nw)^{-\alpha}$ 当 $0\leqslant w\leqslant\pi$ 时成立. 写着

$$g_n(t,\beta)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{(\beta)_n}\left\{\sum_{\nu=0}^{[n/2]}+\sum_{\nu=[n/2]+1}^{n}(\beta-1)_\nu\sin(n-\nu)t\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{1}{(\beta)_n}\{g_{n,1}(t,\beta)+g_{n,2}(t,\beta)\},$$

$$Z_\beta(w)=-\int_w^\pi\frac{d}{dt}g_n(t,\beta)\int_{w/t}^1 v^{q-\alpha}(1-v)^{\alpha-1}\,dv\,dt;$$

由分部积分,

$$Z_\beta(w)=w^{1+q-\alpha}\int_w^\pi(t-w)^{\alpha-1}t^{-1-q}g_n(t,\beta)\,dt$$

$$=Z_{\beta,1}(w)+Z_{\beta,2}(w).$$

这里

$$Z_{\beta,j}(w)=\frac{2}{\pi\cdot(\beta)_n}w^{1+q-\alpha}\int_w^\pi(t-w)^{\alpha-1}t^{-1-q}g_{n,j}(t,\beta)\,dt\quad(j=1,2).$$

现在需要如下的估計式:当 $nt\geqslant1$ 时, 对于 $\frac{1}{t}\leqslant\mu\leqslant n$, 均匀地成立着

$$\frac{2}{\pi(\beta)_n}\sum_{\nu t>1}^{\mu}(\beta-1)_\nu\sin(n-\nu)t=O(nt)^{-\beta};$$

这是因为左端等于 $O\left(n^{-\beta}\sum_{\nu t>1}^{\infty}|(\beta-1)_\nu|\right)=O(nt)^{-\beta}$. 另一方面,

$$\sum_{\nu t<1}(\beta-1)_\nu\sin(n-\nu)t$$

$$=-2\sin\frac{t}{2}\sum_{\nu t<1}(\beta)_\nu\cos\left(n-\nu-\frac{1}{2}\right)t+O(t^{-\beta})=O(t^{-\beta}).$$

从而 $g_n(t,\beta)=O(nt)^{-\beta}$. 暫設 $nw\geqslant2$, 写着

$$Z_{\beta,1}(w)\,w^{\alpha-1-q}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{(\beta)_n}\int_w^{w+\frac{1}{n}}+\int_{w+\frac{1}{n}}^{2w}+\int_{2w}^{\pi}(t-w)^{\alpha-1}t^{-1-q}g_{n,1}(t,\beta)\,dt$$

$$=I_1+I_2+I_3,$$

那末

$$w^{1+q-\alpha}I_1=w^{1+q-\alpha}O(nw)^{-\beta}\int_w^{w+\frac{1}{n}}(t-w)^{\alpha-1}t^{-1-q}\,dt=O(nw)^{-\alpha-\beta}.$$

应用第二中值定理于 I_2, 我們見到有 w' 适合于 $w<w'<2w$ 和

$$w^{1+q-\alpha} I_2 = O(n)(nw)^{-\alpha}\left[\frac{1}{(\beta)_n}\sum_{\nu=0}^{[n/2]}(\beta-1)_\nu \frac{-\cos(n-\nu)t}{n-\nu}\right]_{w+\frac{1}{n}}^{w'}$$
$$= O(nw)^{-\alpha-\beta}.$$

施行分部积分,

$$I_3 = \frac{2}{\pi}\left[(t-w)^{\alpha-1} t^{-1-q} \sum_{\nu=0}^{[n/2]} \frac{(\beta-1)_\nu}{(\beta)_n} \frac{-\cos(n-\nu)t}{n-\nu}\right]_{2w}^{\pi}$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_{2w}^{\pi} \sum_{\nu=0}^{[n/2]} \frac{(\beta-1)_\nu}{(\beta)_n} \frac{\cos(n-\nu)t}{n-\nu}[(t-w)^{\alpha-1} t^{-1-q}]' \, dt$$
$$= O(n^{-1-\beta}) + O(w^{\alpha-q-2-\beta} n^{-1-\beta})$$
$$+\int_{2w}^{\pi} O(n^{-1-\beta} t^{-\beta}) \frac{d}{dt}\{(t-w)^{\alpha-1} t^{-1-q}\} \, dt;$$

这里我們注意

$$[-(t-w)^{\alpha-1} t^{-1-q}]' = t^{-2-q}(t-w)^{\alpha-2}\{(2+q-\alpha)t-(1+q)w\}$$

当 $t>w$ 时,是正的,从而

$$0<\int_{2w}^{\pi} -[(t-w)^{\alpha-1} t^{-1-q}]' \, t^{-\beta} \, dt$$
$$= O(1) + w^{\alpha-q-\beta-2} - \beta\int_{2w}^{\pi}(t-w)^{\alpha-1} t^{-2-q-\beta} \, dt$$
$$= O(w^{\alpha-q-\beta-2}).$$

由是,当 $nw\geqslant 1$ 时, $Z_{\beta,1}(w) = w^{-\alpha+1+q}(I_1+I_2+I_3) = O(nw)^{-\alpha-\beta}$.

现在研究 $Z_{\beta,2}(w)$. 将其中的和改写为

$$\sum_{\nu=[n/2]+1}^{n}(\beta-1)_\nu \sin(n-\nu)t = \sum_{2\nu<n}(\beta-1)_{n-\nu}\sin \nu t,$$

我們見到

$$\frac{\pi(\beta)_n}{2} Z_{\beta,2}(w) = w^{1+q-\alpha}\int_{w}^{\pi}(t-w)^{\alpha-1} t^{-1-q} g_{n,2}(t, \beta) dt$$
$$= \int_0^w u^{q-\alpha}\int_u^{\pi}(t-u)^{\alpha-1} t^{-q}\frac{d}{dt} g_{n,2}(t, \beta) dt \, du$$
$$= \int_w^{\pi} t^{-q}\frac{d}{dt} g_{n,2}(t, \beta)\int_0^w u^{q-\alpha}(t-u)^{\alpha-1} du \, dt$$
$$+\int_0^w t^{-q}\frac{d}{dt} g_{n,2}(t, \beta)\int_0^t u^{q-\alpha}(t-u)^{\alpha-1} du \, dt.$$

最后的积分等于

$$B(\alpha,\ q-\alpha+1)\int_0^w \frac{d}{dt}g_{n,2}(t,\ \beta)=B(\alpha,\ q-\alpha+1)g_{n,2}(w,\ \beta)$$

$$=O((\beta-1)_n)\max_{\mu}|\sin w+\sin 2w+\cdots+\sin \mu w|=O(nw)^{-1}(\beta)_n.$$

还有一个积分等于

$$\int_w^{\pi}\frac{d}{dt}g_{n,2}(t,\ \beta)\int_0^{w/t}v^{q-\alpha}(1-v)^{\alpha-1}\,dv\,dt$$

$$=B\ (q-\alpha+1,\ \alpha)\int_w^{w_1}\frac{dg_{n,2}(t,\ \beta)}{dt}dt,$$

这里 $w<w_1<\pi$. 由是可知

$$Z_{\beta,2}(w)=O(n^{\beta-1}\,w^{-1}\,n^{-\beta})=O(nw)^{-1}.$$

因此,

$$Z_{\beta}(w)=Z_{\beta,1}(w)+Z_{\beta,2}(w)=O(nw)^{-\alpha-\beta}+O(nw)^{-1}.$$

由是,当 $nw\geqslant 1$ 时, $Z_{\beta}(w)=O(nw)^{-\alpha-\beta}$ 成立.

在 $nw<1$ 的情况,我們应用 $g_n(w,\ \beta)=O(nw)$. 由是,

$$w^{1+q-\alpha}\int_w^{2w}(t-w)^{\alpha-1}\,t^{-1-q}\,g_n(t,\ \beta)dt=w^{-\alpha}\int_w^{2w}(t-w)^{\alpha-1}\,O(nw)dt$$

$$=O(nw).$$

对于在$(2w,\ \pi)$上的积分,我們还得应用 $g_n(t,\ \beta)=O(nt)^{-\beta}$, 从而

$$w^{1+q-\alpha}\int_{2w}^{\pi}(t-w)^{\alpha-1}\,t^{-1-q}g_n(t,\ \beta)dt$$

$$=O(n^{-\beta})\,w^{1+q-\alpha}\int_{2w}^{\pi}(t-w)^{\alpha-1}\,t^{-1-q-\beta}\,dt$$

$$=O(nw)^{-\beta}\int_2^{\frac{\pi}{w}}(v-1)^{\alpha-1}\,v^{-1-q-\beta}\,dv=O(nw)^{-\beta}.$$

合并起来,我們得到 $Z_{\beta}(w)=O(nw)^{-\beta}$ $(nw<2)$. 因此,

$$Z_{\beta}(w)=O(nw)^{-\beta}(1+nw)^{-\alpha}\quad(0<w\leqslant\pi).$$

現在将这个結果应用于

$$\frac{\tau_n^{\beta}}{n}=-\frac{\sin\alpha\pi}{n\pi}\int_0^{\pi}Z_{\beta}(w)d\psi(w).$$

我們見到有常数 K 适合于

$$\left|\frac{\tau_n^\beta}{n}\right|\leqslant\frac{K}{n}\int_0^{\frac{1}{n}}(nw)^{-\beta}|d\psi(w)|+\frac{K}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}(nw)^{-\alpha-\beta}|d\psi(w)|.$$

置 $H(w)=\sum n^{-1}\min\{(nw)^{-\beta},(nw)^{-\alpha-\beta}\}$,则因 $-\beta$ 和 $\beta+\alpha$ 都是正数,

$$H(w)=\sum_{nw<1}n^{-1}(nw)^{-\beta}+\sum_{nw>1}n^{-1}(nw)^{-\alpha-\beta}$$

$$\leqslant-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha+\beta}=C(\text{常数}).$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\tau_n^\beta|}{n}<K\int_0^{\pi}H(w)|d\psi(w)|<KC\int_0^{\pi}|d\psi(w)|<\infty.$$

定理 2 証毕.

在§4中,我們証明有界变差函数属于 Lip α $(\alpha>0)$ 的話,它的富理埃級数絕对收斂.哈戴-立脫尔伍德 (J. L. M. S. 第三卷, 1928) 把它拓广成如下的形式:假如有界变差函数 f 属于 $\mathrm{Lip}(k;p)$,就是說,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta+h)-f(\theta-h)|^p\,d\theta=O(h^{kp}),$$

那末当 $kp>1$ 时,$\mathfrak{S}[f]$ 絕对收斂.他們并且証明:假如

$$f\in\mathrm{Lip}\,\alpha\quad(\alpha>0),\quad f\in\mathrm{Lip}\left(k,\frac{1}{k}\right)\quad\left(k>\frac{1}{2}\right),$$

那末 $\mathfrak{S}[f]$ 絕对收斂.

这里建立如下的

定理 3 設 f 是一有界变差函数,$f\in\mathrm{Lip}\,k$,那末当 $\alpha>-\frac{1}{2}k$ 时,

$$\mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)|C,\alpha|.$$

又等式 $\mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)(C,\beta)$ 当 $\beta>-\frac{1}{2}(k+1)$ 时成立.

这个定理以及上述哈戴-立脫尔伍德的定理都包含在下述定理中.

定理 4 設 $f(\theta)\in\mathrm{Lip}(k_j,p_j)$, $0<k_j\leqslant1$, $1\leqslant p_1\leqslant2\leqslant p_2$,

$$1\leqslant k_1p_1<k_2p_2,\quad \varkappa=\frac{p_1k_1(p_2-2)+p_2k_2(2-p_1)}{2(p_2-p_1)},$$

那末当 $\alpha>\frac{1}{2}-\varkappa$ 时, $\mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)|C,\alpha|$. 又 $\mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)(C,\beta)$ 当 $\beta>-\varkappa$ 时成立.

由于 $\varkappa>\frac{1}{2}$, 所以当 $p_1=k_1=1, p_2=\infty$ 时, 定理化为上述哈戴和立脫尔伍德的定理.

要証明定理 4, 首先建立

拓广的黎斯不等式(参見哈戴-立脫尔伍德于 1936 年在丟克数学杂志 (Duke Math. J.) 上的論文) 設 $f(\theta+2\pi)=f(\theta)\in L^p(0,2\pi)$, $f(-\theta)=f(\theta)$, 則 f 的共軛函数

$$\tilde{f}(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin\theta}{\cos\varphi-\cos\theta}f(\varphi)d\varphi$$

适合

$$\int_0^\pi\frac{|\tilde{f}(\theta)|^p}{\theta^q}d\theta\leqslant K(q,p)\int_0^\pi\frac{|f(\theta)|^p}{\theta^q}d\theta,$$

这里 $p>1$, $-p<q-1<p$.

当証明时, 不妨假設 $f(\theta)$ 在 $(\pi-\delta,\pi)$ 上的函数值是 0, 这里 $\delta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. 事实上, 写着 $f(\theta)=f_1(\theta)+f_2(\theta)$,

$$f_1(\theta)=f(\theta)\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi-\delta),\quad f_1(\theta)=0\quad(\pi-\delta<\theta\leqslant\pi).$$

且設 f_j 的共軛函数为 $\tilde{f}_j$:

$$\tilde{f}_j(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin\theta}{\cos\varphi-\cos\theta}f_j(\varphi)d\varphi\quad(j=1,2).$$

那末

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi\theta^{-q}|\tilde{f}_2(\theta)|^pd\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\theta^{-q}|\tilde{f}_2(\theta)|^pd\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\theta^q}\left|\frac{1}{\pi}\int_{\pi-\delta}^\pi\frac{\sin\theta}{\cos\varphi-\cos\theta}f_2(\varphi)d\varphi\right|^p\\&=O(1)\int_0^\pi|\tilde{f}_2(\theta)|^pd\theta+(\pi\cos\delta)^{-p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^{p-q}\int_0^\delta|f_2(\pi-t)|^pdt\,d\theta\\&<C\int_0^\pi|f_2(\theta)|^pd\theta,\end{aligned}$$

C 是常数，这里应用了原来的黎斯不等式．由是

$$\int_0^{\pi}\theta^{-q}|\tilde{f}_2(\theta)|^p\,d\theta\leqslant K(p,q)\int_0^{\pi}\theta^{-q}|f_2(\theta)|^p\,d\theta.$$

假如証得 $f_1(\theta)$ 和 $\tilde{f}_1(\theta)$ 之間也有如上的不等式，那末从

$$\left(\int_0^{\pi}\theta^{-q}|\tilde{f}(\theta)|^p\,d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\sum_{j=1}^{2}\left(\int_0^{\pi}\theta^{-q}|\tilde{f}_j(\theta)|^p\,d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{2}\left(K\int_0^{\pi}\theta^{-q}|f_j(\theta)|^p\,d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(2K\int_0^{\pi}\theta^{-q}(|f_1(\theta)|^p+|f_2(\theta)|^p)\,d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

得到

$$\int_0^{\pi}\theta^{-q}|\tilde{f}(\theta)|^p\,d\theta\leqslant 2K\int_0^{\pi}\theta^{-q}|f(\theta)|^p\,d\theta.$$

因此，我們只要証明

$$\int_0^{\pi}\theta^{-q}|\tilde{f}_1(\theta)|^p\,d\theta\leqslant K\int_0^{\pi}\theta^{-q}|f_1(\theta)|^p\,d\theta$$

好了．設偶函数 $U(\theta)=f(\theta)\tan^{\beta}\dfrac{\theta}{2}\left(0<\theta<\pi,\beta=-\dfrac{q}{p}\right)$ 的共軛函数为

$$V(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\cos\varphi-\cos\theta}U(\varphi)d\varphi,$$

則由原来的黎斯不等式，

$$\int_0^{\pi}|V(\theta)|^p\,d\theta\leqslant K_p\int_0^{\pi}|U(\theta)|^p\,d\theta=K_p\int_0^{\pi-\delta}|U(\theta)|^p\,d\theta.$$

假如 $w(\theta)=\tilde{f}(\theta)\tan^{\beta}\dfrac{\theta}{2}-V(\theta)$，那末，由于 $\sec^2\dfrac{\theta}{2}\geqslant 1$，从

$$\int_0^{\pi}|\tilde{f}(\theta)|^p\theta^{-q}\,d\theta\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\tilde{f}(\theta)|^p\theta^{-q}\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta+O(1)\int_0^{\pi}|f(\theta)|^p d\theta$$

$$\leqslant K\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}|w(\theta)|^p\sec^2\frac{\theta}{2}d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}|V(\theta)|^p\sec^2\frac{\theta}{2}d\theta\right\}+K\int_0^{\pi}|f(\theta)|^p d\theta,$$

我們只要証明

$$\int_0^{\pi}|w(\theta)|^p\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta\leqslant K\int_0^{\pi}|U(\theta)|^p\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

就好了．写着 $\xi=\tan\dfrac{\theta}{2}$，$\eta=\tan\dfrac{\varphi}{2}$，則得

$$\frac{\sin\theta}{\cos\varphi-\cos\theta}=\frac{\xi}{\xi^2-\eta^2}\sec^2\frac{\varphi}{2}.$$

从而

$$w(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\xi}{\xi^2-\eta^2}\left[f(\varphi)\tan^\beta\frac{\theta}{2}-U(\varphi)\right]\sec^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\xi}{\xi^2-\eta^2}\left[\frac{\tan^\beta\frac{\theta}{2}}{\tan^\beta\frac{\varphi}{2}}-1\right]U(\varphi)\sec^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

置 $(\xi,\eta)=\dfrac{\xi(\eta^\beta-\xi^\beta)}{\eta^\beta(\eta^2-\xi^2)}$，則因

$$w(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\xi,\eta)U(\varphi)\sec^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,$$

$$\int_0^\pi|w(\theta)|^p\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\int_0^\pi|w(\theta)|^{p-1}\sec^2\frac{\theta}{2}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\xi,\eta)U(\varphi)\sec^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right|d\theta$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\int_0^\pi W(\theta,\varphi)U(\theta,\varphi)\,d\theta\,d\varphi$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi\int_0^\pi[W(\theta,\varphi)]^{p'}\,d\theta\,d\varphi\right]^{\frac{1}{p'}}\cdot\left[\int_0^\pi\int_0^\pi[U(\theta,\varphi)]^p\,d\theta\,d\varphi\right]^{\frac{1}{p}},$$

这里 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$,

$$W(\theta,\varphi)=|w(\theta)|^{p-1}\left[(1+\xi^2)(1+\eta^2)\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\frac{1}{p}}|(\xi,\eta)|\right]^{\frac{1}{p'}},$$

$$U(\theta,\varphi)=|U(\varphi)|\left[(1+\eta^2)(1+\xi^2)\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{\frac{1}{p'}}|(\eta,\xi)|\right]^{\frac{1}{p}}.$$

設 $\eta/\xi=t$，則因

$$\int_0^\pi(1+\eta^2)\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\frac{1}{p}}|(\xi,\eta)|\,d\varphi=2\int_0^\infty t^{-\frac{1}{p}+\frac{2}{p}}\left|\frac{t^\beta-1}{t^2-1}\right|dt<C<\infty,$$

我們得到

$$\int_0^\pi|w(\theta)|^p\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$\leqslant\frac{C}{\pi}\left[\int_0^\pi|w(\theta)|^p\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta\right]^{\frac{1}{p'}}\left[\int_0^\pi|U(\varphi)|^p\sec^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right]^{\frac{1}{p}}.$$

从而

$$\int_0^{\pi} |w(\theta)|^p \sec^2 \frac{\theta}{2}\, d\theta \leqslant \left(\frac{C}{\pi}\right)^p \int_0^{\pi} |U(\varphi)|^p \sec^2 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi.$$

这就完成了拓广的黎斯不等式的証明.

利用这个不等式,我們建立关于一級数的引理.

引理 1 設 $F(z)$ 在 $|z|<1$ 上是正則的,它具有如下的边値函数:

$$g(t)=F(e^{it})=\varphi(t)+i\psi(t),\ \psi(-t)=-\psi(t);$$

$$\int_0^{\pi} |\psi(t+h)-\psi(t-h)|^p t^{-q} dt = O(h^{pk}) \quad (h\to+0)$$

$$(p>1,\ 0<k<1,\ q\geqslant 0),$$

那末当 $r\to 1-0$ 时,对于一切导函数 $F^{(j)}(z)$, 成立着

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F^{(j)}(re^{i\theta})|^p |\theta|^{-q}\, d\theta = O[(1-r)^{kp-jp}].$$

【証明】 設 $z=re^{i\theta}(0\leqslant r<1)$, 則因 $g(t)\in L^p$, $\dfrac{2\pi}{j!}F^{(j)}(z)$ 等于

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(t)e^{it}\, dt}{(e^{it}-z)^{j+1}} = e^{-ji\theta}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(t+\theta)e^{it}\, dt}{(e^{it}-r)^{1+j}}.$$

另一方面,

$$0=e^{-ji\theta}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(\theta+t)e^{jit}}{(1-re^{it})^{j+1}}\, dt = -e^{-ji\theta}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(\theta-t)e^{it}\, dt}{(e^{it}-r)^{j+1}}.$$

相加得到

$$F^{(j)}(z)=\frac{j!}{2\pi}\, e^{-ji\theta}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{[g(\theta+t)-g(\theta-t)]e^{it}}{(e^{it}-r)^{1+j}}\, dt.$$

由是

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |F^{(j)}(z)|^p |\theta|^{-q}\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \frac{j!}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta+t)-g(\theta-t)|^p |\theta|^{-q}\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \frac{dt}{|e^{it}-r|^{j+1}}.$$

由于 θ 的偶函数 $\psi(\theta+t)-\psi(\theta-t)$ 是 $-i(g(\theta+t)-g(\theta-t))$ 的实部,利用拓广的黎斯不等式,

$$\int_0^{\pi} |\varphi(\theta+t)-\varphi(\theta-t)|^p \theta^{-q}\, d\theta = O(|t|^{pk}).$$

从而

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g(\theta+t)-g(\theta-t)|^p|\theta|^{-q}\,d\theta=O\,(|t|^{pk}),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|F^{(j)}(z)|^p\,|\theta|^{-q}\,d\theta=O\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t^k\,dt}{|e^{it}-r|^{j+1}}\right)^p=O\,((1-r)^{p(k-j)}).$$

引理 1 証毕.

引理 2 設 $0<k<1,\ p>1,\ F^{(j)}(z)$ 在 $|z|<1$ 中存在,則当 $q\geqslant 0$ 时,

(i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|F^{(j)}(z)|^p|\theta|^{-q}\,d\theta=O\,(1-r)^{pk-pj}$

含在

(ii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|g(\theta+t)-g(\theta-t)|^p|\theta|^{-q}\,d\theta=O\,(|t|^{pk})$

中. 当 $q=0$ 时, (i) 含有 (ii) (見德国数学时刊(Math. Zeits.)第二十八卷上哈戴-立脫尔伍德的論文).

【証明】 从(ii)到(i)的証明,見引理 1 的証明.

引理 3 設一級数 $F(z)=\sum c_n z^n$ 在 $|z|<1$ 中收斂, $z=re^{i\theta}$,

$$p>1,\ \ 0<k<1,\ \ 0\leqslant q\leqslant 1,\ \ q+pk>1,$$

当 $r\to 1-0$ 时,假如有 $F^{(j)}(z)$ 适合于

$$\int_{-\pi}^{\pi}|F^{(j)}(z)|^p|1-z|^{-q}\,d\theta=O((1-r)^{kp-jp}),$$

那末級数 $\sum c_n$ 当 $\alpha>\alpha_0=\max\left(\dfrac{1}{2}-k,\ \dfrac{1}{p}-k\right)$ 时,可用 $|C,\alpha|$ 平均法求和.

【証明】 置 $z=re^{i\theta},\ w=\rho e^{i\theta}$,則因 $\sum(\alpha)_n\,\tau_n^\alpha\,z^n=z\,F'(z)(1-z)^{-\alpha}$, $(\alpha)_n\,\tau_n^\alpha=\sum\limits_{\nu=0}^{n}(\alpha-1)_{n-\nu}\,\nu c_\nu$, 我們見到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n^\alpha\,z^{n+\alpha}=\int_0^r(z-w)^\alpha\frac{d}{d\rho}[wF'(w)(1-w)^{-\alpha}]d\rho$$

$$=\int_0^z(z-w)^\alpha\frac{d}{dw}[wF'(w)(1-w)^{-\alpha}]dw$$

$$=I_1+I_2+I_3,$$

这里

$$I_j=\int_0^z (z-w)^\alpha (1-w)^{-\alpha}\, \chi_j(w)\,dw,$$

$$\chi_1(w)=F'(w),\ \chi_2(w)=wF''(w),\ \chi_3(w)=\alpha\, wF'(w)(1-w)^{-1}.$$

当証明时,不妨假設 $p\leqslant 2$. 事实上,当 $p>2$ 时,取如下的 η:

$$1-k<\eta<\frac{p+2q-2}{p}.$$

我們見到

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|F^{(j)}(z)|^2}{|1-z|^\eta}d\theta\right)^p$$
$$\leqslant\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|F^{(j)}(z)|^{2\frac{p}{2}}}{|1-z|^{2\frac{q}{p}\cdot\frac{p}{2}}}\,d\theta\right)^2\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{|1-z|^{\left(\eta-\frac{2q}{p}\right)\frac{p}{p-2}}}\right)^{p-2}$$
$$\leqslant\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|F^{(j)}(z)|^p}{|1-z|^q}\,d\theta\right)^2\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{|1-z|^s}\right)^{p-2}.$$

这里 $s<1$.

首先証明关系

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|I_j|^p\,d\theta\right)^{\frac{1}{p}}=O\left((1-r)^{\alpha+k-1}\right)$$

当 $j=2$ 时成立. 实际上,

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_0^z (z-w)^\alpha\, w(1-w)^{-\alpha}\,F''(w)\,dw\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant 2\int_0^r (r-\rho)^\alpha\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|F''(w)|^p\,d\theta}{|1-w|^q}\right)^{\frac{1}{p}}d\rho$$
$$=O\left(\int_0^r (r-\rho)^\alpha(1-\rho)^{k-2}\,d\rho\right).$$

最后的积分等于

$$\frac{r^{1+\alpha}}{1+\alpha}+\frac{2-k}{1+\alpha}\int_0^r (r-\rho)^{\alpha+1}(1-\rho)^{k-3}\,d\rho$$
$$\leqslant\frac{1}{1+\alpha}+\frac{2-k}{1+\alpha}\int_0^r (1-\rho)^{\alpha+k-2}\,d\rho=O\left((1-r)^{\alpha+k-1}\right)+O(1).$$

对于 I_2 的处理法,也可以施行于 I_1; 从而 $|I_1|^p$ 的积分也是

$$O((1-r)^{(\alpha+k-1)p}).$$

对于 I_3, 我們首先注意

$$(1-w)^{-1-\alpha}=O((1-\rho)^{-1}|1-w|^{-q/p});$$

因此

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|I_3|^p\,d\theta\right)^{\frac{1}{p}}=O\left(\int_0^r(r-\rho)^\alpha(1-\rho)^{-1}(1-\rho)^{k-1}\,d\rho\right)$$
$$=O((1-r)^{\alpha+k-1}).$$

总結起来，我們得到

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\tau_n^\alpha z^n\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}=O((1-r)^{\alpha+k-1})$$

左边是 p 的增加函数. 置 $P=\min(p,2)/(\min(p,2)-1)$，由豪施多甫的不等式，

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\tau_n^\alpha r^n|^P\right)^{\frac{1}{P}}=O((1-r)^{\alpha+k-1}).$$

置 $r=\left(1-\frac{1}{n}\right)$，則得

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n}|\tau_\nu^\alpha|^P\right)^{\frac{1}{P}}=O(n^{1-\alpha-k}).$$

由于 $\alpha>\alpha_0$，所以

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-1}|\tau_\nu^\alpha|\leqslant\sum_{\nu=1}^{n-1}\Delta\nu^{-1}(|\tau_1^\alpha|+\cdots+|\tau_\nu^\alpha|)+n^{-1}(|\tau_1^\alpha|+\cdots+|\tau_n^\alpha|)$$
$$=O\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-2+1-(\alpha-\alpha_0)}+n^{-(\alpha-\alpha_0)}\right)=O(1).$$

引理 3 証毕.

系 1 設 $p>1$, $0<k<1$, $kp\leqslant1$, $\alpha>\alpha_0$, $z=re^{i\theta}$, $F(z)=\sum c_n z^n$，則当

$$\int_0^t|F'(re^{i\theta+i\varphi})|^p\,d\varphi=O\left(\frac{|t|}{(1-r)^{p-pk}}\right)\quad(1-r\leqslant|t|)$$

时，級数 $\sum c_n e^{ni\theta}$ 可用 $|C,\alpha|$ 平均法求和.

当証明时，不妨假設 $\theta=0$. 設 $1-pk<q<1$, $H=\sqrt{(1-r)^2+\varphi^2}$，則当 $r\to1$ 时，$\int_0^{1-r}H^{-2-q}\varphi d\varphi=O((1-r)^{-q})$, $\int_{1-r}^{\pi}H^{-2-q}\varphi^2\,d\varphi=O(1)$. 記 $|F'(re^{i\varphi})|^p$ 在 $0\leqslant\varphi\leqslant t$ 或 $t\leqslant\varphi\leqslant0$ 上的积分为 $G(r,t)$，那末

$$\int_0^\pi |F'(z)|^p H^{-q} d\varphi$$

$$=G(r, \pi)(H(\pi))^{-q}+q\left(\int_0^{1-r}+\int_{1-r}^\pi\right)G(r, \varphi)H^{-q-2}\varphi d\varphi$$

$$=O((1-r)^{pk-p})+O(G(r, (1-r)(1-r)^{-q}))=O((1-r)^{pk-p}).$$

同样的結果对于 $\int_{-\pi}^0 |F'(z)|^p H^{-q} d\varphi$ 也存在．因此

$$\int_{-\pi}^\pi |F'(z)|^p H^{-q} d\varphi=O((1-r)^{pk-p}),$$

由是可知引理 3 的条件成立，引理 3 完成着系 1 的証明．

系 2 設 $p>1$, $0<k<1$, $\alpha>\alpha_0$．假如 $F(z)=\sum c_n z^n$ $(z=re^{i\varphi})$满足

$$\int_{-\pi}^\pi |F^{(j)}(z)|^p d\varphi=O((1-r)^{kp-jp}),$$

在 $F(z)$ 的正則点 $e^{i\theta}$，級数 $\sum c_n e^{in\theta}$ 可用 $|C, \alpha|$ 平均法求和．

事实上，在 $pk>1$ 的情况，系 2 是引理 3 的直接結果．对于 $pk\leqslant 1$ 时的証明，我們不妨假設 $\theta=0$，那末 $z=1$ 是函数

$$G(z)=F(z)-F'(1)z=c_0+(c_1-F'(1))z+\sum_{n=2}^\infty c_n z^n$$

的一个正則点，并且 $G'(1)=0$．由是 $G'(z)=O(|1-z|)$ $(z\to 1)$，

$$\int_{-\pi}^\pi |G'(z)|^p|1-z|^{-1} d\varphi=O((1-r)^{kp-p}).$$

由引理 3，級数 $c_0+(c_1-F'(1))+\sum_{n=2}^\infty c_n$ 当 $\alpha>\alpha_0$ 时，是 $|C, \alpha|$ 可和的．系 2 証毕．

从引理 1 和引理 3 我們导出下述

定理 5 設 $\psi(t)$ 是 $\frac{1}{2}(f(\theta+t)-f(\theta-t))$ 的共軛函数．在点 θ，假如有 q 适合于 $q+pk>1$，当 $h\to 0$ 时，

$$\int_{-\pi}^\pi |\psi(t+h)-\psi(t-h)|^p t^{-q} dt=O(h^{pk}),$$

那末 $\mathfrak{S}[f;\theta]$ 是 $|C, \alpha|$ 可和的，但 $\alpha>\alpha_0$．

【証明】 設 $\mathfrak{S}[f;t]=\sum A_n(t)$，$z=re^{i\varphi}$，$F(z)=\sum A_n(t)z^n$，那末

$\psi(t)$ 是 $F(z)$ 的边值函数虚部的共軛函数. 由引理 1,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|F^{(j)}(re^{i\varphi})|^p|\varphi|^{-q}\,d\varphi=O\left((1-r)^{kp-jp}\right).$$

由引理 3, 級数 $\sum A_n(\theta)$ 可用 $|C,\alpha|$ $(\alpha>\alpha_0)$ 平均法求和.

【定理 4 的証明】 簡写 $\Delta=|f(t+h)-f(t-h)|$, 則由赫耳竇不等式,

$$\int\Delta^2\,dt\leqslant\left(\int\Delta^{p_1}\,dt\right)^{\frac{p_2-2}{p_2-p_1}}\cdot\left(\int\Delta^{p_2}\,dt\right)^{\frac{2-p_1}{p_2-p_1}}.$$

将假設 $f\in\mathrm{Lip}(k_j,\,p_j)$, $1\leqslant p_1\leqslant 2\leqslant p_2$ 与上式相結合, 得到

$$\int\Delta^2\,dt\leqslant Ah^{p_1k_1\frac{p_2-2}{p_2-p_1}+p_2k_2\frac{2-p_1}{p_2-p_1}}=Ah^{2\varkappa}.$$

由于共軛函数也滿足同样的不等式, 所以从定理 5——$2\varkappa>1$, 知道: 当 $\alpha>\frac{1}{2}-\varkappa$ 时,

$$\mathfrak{S}[f;\,\theta]=f(\theta)\,|C,\,\alpha|.$$

証明完毕.

系 1 設 $f\in\mathrm{Lip}\,\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ 且 $f\in\mathrm{Lip}\left(k,\,\frac{1}{k}\right)\left(k>\frac{1}{2}\right)$, 則 $\mathfrak{S}[f]$ 絕对收斂.

这是哈戴和立脫尔伍德(1928)的定理, 可置 $p_1k_1=1$, $p_2\to\infty$ 于定理 4 而得到它.

系 2 設 f 是有界变差且属于 $\mathrm{Lip}\,(k,\,p)$, 則当 $kp>1$ 时, $\mathfrak{S}[f]$ 絕对收斂.

这也是哈戴和立脫尔伍德的定理, 可置 $p_1=k_1=1$ 于定理 4 得到它. f 是有界变差等价于 $f\in\mathrm{Lip}\,(1,\,1)$.

11. 富理埃系数与 $|C,\,\alpha|$ 求和. 連續模数与 $|C,\,\alpha|$ 求和. $|C,\,\alpha|$ 求和因子

設

$$f(\theta)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\equiv\mathfrak{S}[f;\,\theta].$$

对于 $\mathfrak{S}[f]$ 的 $|C,\,\alpha|$ 可和性, 条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\sqrt{a_n^2+b_n^2}<\infty \tag{1}$$

是必要的*). 現在假設

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\log n)^{p+\varepsilon-1}(|a_n|^p+|b_n|^p)<\infty \quad (1<p\leqslant 2, \varepsilon>0)\ . \tag{2}$$

我們証明

定理 1 假如两个差列$\{\Delta^l a_n\}$和$\{\Delta^m b_n\}$都是单調，那末当(2)成立并且条件(1)对于$0\leqslant\alpha<1-\dfrac{1}{p}$成立时，$\mathfrak{S}[f]$几乎处处可用$|C,\alpha|$平均法求和.

【証明】 簡写 $\bar{n}=\left[\dfrac{n}{2}\right]$,

$$c_n(\theta)=\sum_{\nu=\bar{n}+1}^{n}(\alpha-1)_{n-\nu}\,\nu a_\nu\cos\nu\theta,$$

$$s_n(\theta)=\sum_{\nu=\bar{n}+1}^{n}(\alpha-1)_{n-\nu}\,\nu b_\nu\sin\nu\theta,$$

$$t_n(\theta)=\sum_{\nu=1}^{\bar{n}}(\alpha-1)_{n-\nu}\,\nu(a_\nu\cos\nu\theta+b_\nu\sin\nu\theta).$$

下面的$K_1, K_2, \cdots$都是常数. 設$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 我們見到

$$\int_0^{2\pi}|t_n(\theta)|\,d\theta\leqslant K_1\left(\int_0^{2\pi}|t_n(\theta)|^q\,d\theta\right)^{\frac{1}{q}}.$$

当$\nu\leqslant\bar{n}$时，$(\alpha-1)_{n-\nu}/(\alpha)_\nu\leqslant K_2 n^{-1}$. 由豪施多甫的不等式，最后的积分小于

$$K_3\left\{\sum_{\nu=1}^{\bar{n}}(\alpha-1)_{n-\nu}^p\ \nu^p(|a_\nu|^p+|b_\nu|^p)\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

因此，

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(\alpha)_n}\int_0^{2\pi}|t_n(\theta)|\,d\theta\leqslant K_4\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{\nu=1}^{\bar{n}}\nu^p(|a_\nu|^p+|b_\nu|^p)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=K_4\sum_{n=1}^{N}(n\ln)^{-\frac{1}{q}}n^{-\frac{p+1}{p}}\ln^{\frac{1}{q}}\left\{\sum_{\nu=1}^{\bar{n}}(|a_\nu|^p+|b_\nu|^p)\nu^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant K_5\left(\sum(n\ln)^{-1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{n=1}^{N}n^{-1-p}\ln^{p-1}\sum_{\nu=1}^{\bar{n}}\nu^p(|a_\nu|^p+|b_\nu|^p)\right)^{\frac{1}{p}},$$

*) 这是 E. 戈格貝脫良兹于 1925 年載在法国杂志上发表的定理.

这里 $\ln=(\log n)^{1+\frac{s}{p-1}}$. 因此

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(\alpha)_n}\int_0^{2\pi}|t_n(\theta)|d\theta\leqslant K_6\left\{\sum_{\nu=1}^{N}\nu^p(|a_\nu|^p+|b_\nu|^p)\sum_{n=2\nu}^{N}n^{-1-p}\ln^{p-1}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant K_7\left\{\sum_{\nu=1}^{N}(\log\nu)^{p+s-1}(|a_\nu|^p+|b_\nu|^p)\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

从而級数 $\sum\frac{1}{n(\alpha)_n}\int_0^{2\pi}|t_n(\theta)|d\theta$ 收斂.

由于 $\alpha<1$, 所以当 ν 增加时, $\nu(\alpha-1)_{n-\nu}$ 是增大的, 从而存在如下的 n^* 和 λ_n:

$$C_n(\theta)=n\lambda_n\sum_{\nu=n^*}^{n}a_\nu\cos\nu\theta\quad(\bar{n}<n^*\leqslant n,\ |\lambda_n|<1).$$

記

$$c_0^0(\theta)=\frac{1}{2},\ c_1^0(\theta)=\cos\theta,\ \cdots,\ c_n^0(\theta)=\cos n\theta,\ \cdots;$$

$$c_n^\nu(\theta)=c_0^{\nu-1}(\theta)+\cdots+c_n^{\nu-1}(\theta)\quad(\nu=1,\cdots;n=0,1,\cdots),$$

則因 $c_\nu^l(\theta)$ 的絕对值小于 $K_8\theta^{-1-l}$ $(0<\theta\leqslant\pi)$, 所以

$$\sum_{\nu=n^*}^{n}a_\nu\cos\nu\theta$$

$$=\sum_{\nu=n^*}^{n}\Delta^l a_\nu(c_\nu^l(\theta)-c_{n^*-1}^l(\theta))+\sum_{j=0}^{l-1}\Delta^j a_{n+1}(c_n^{j+1}(\theta)-c_{n^*-1}^{j+1}(\theta))$$

的絕对值, 当 $0<\theta\leqslant\pi$ 时, 小于

$$K_9\theta^{-1-l}\sum_{\nu=\bar{n}}^{n}\left(|\Delta^l a_\nu|+\sum_{j=1}^{l}|a_{n+j}|\right).$$

由于 $\{\Delta^l a_\nu\}$ 的单調性,

$$\sum_{\nu=\bar{n}}^{n}|\Delta^l a_\nu|=\left|\sum_{\nu=\bar{n}}^{n}\Delta^l a_\nu\right|=|\Delta^{l-1}a_{n+1}-\Delta^{l-1}a_{\bar{n}}|.$$

从而

$$\left|\sum_{\nu=n^*}^{n}a_\nu\cos\nu\theta\right|\leqslant K_{10}\theta^{-1-l}\left(\sum_{j=0}^{l}|a_{\bar{n}+j}|+\sum_{j=0}^{l}|a_{n+j}|\right).$$

因此, 当 (1) 成立时, $\sum|C_n(\theta)|/n(\alpha)_n$ 当 $0<\theta<\pi$ 时收斂. 同样可証 $\sum|S_n(\theta)|/n(\alpha)_n$ 在 $(0,\pi)$ 上收斂.

由于 $(\alpha)_n\tau_n^\alpha(\theta)=c_n(\theta)+S_n(\theta)+t_n(\theta)$, 所以級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tau_n^{\alpha}(\theta)\quad(-\pi<\theta<\pi)$$

几乎处处絕对收斂. 事实上, 从 $\sum\frac{1}{n(\alpha)_n}\int|t_n(\theta)|d\theta$ 的收斂, 知道級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\alpha)_n}|t_n(\theta)|$$

几乎处处收斂(富弼尼的定理). 証明完毕.

特別, 假如(2)当 $p=2$ 时成立, 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\tau_n^{\alpha}(\theta)|^2\,d\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时收斂. 这是王福春的定理, 詳見 §3.

設 $f\in L^p(0,\,2\pi)$, $p\geqslant1$, 我們称

$$\omega_p(f,\,h)\equiv\omega_p(h)=\sup_{0<t\leqslant h}\left[\left(\int_0^{2\pi}|f(\theta+t)-f(\theta)|^p\right)d\theta\right]^{\frac{1}{p}}$$

为周期函数 $f(\theta)$ 的 **p 次模数**. 当 f 具有連續性时, $\omega_p(h)$ 是 p 的增加函数; 此时易知

$$\omega_\infty(h)=\sup_{0<t\leqslant h}\max_{\theta}|f(\theta+t)-f(\theta)|.$$

通称 $\omega_\infty(h)$ 为 f 的連續模数, 簡記 $\omega(h)=\omega_\infty(f,\,h)$. 当

$$\omega(h)=O(h^{\alpha})\quad\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$$

时, $\mathfrak{S}[f]$ 絕对收斂. 这是我們所已知的定理(貝恩斯坦, 1914). 此时級数 $\sum\omega\left(\frac{1}{n}\right)\Big/\sqrt{n}$ 收斂.

希斯洛普 (Hyslop, 1937) 証明: 当 $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha\left(0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 时,

$$\mathfrak{S}[f]=f(\theta)\left|C,\,\frac{1}{2}-\alpha+\varepsilon\right|\quad(\varepsilon>0).$$

此时級数 $\sum\omega\left(\frac{1}{n}\right)\Big/n^{1-\alpha+\eta}$ $(\eta>0)$ 收斂.

貝恩斯坦的定理以及希斯洛普的定理都包含在下述松山 (N. Matsuyama, 东北数学杂志 (2)2, 1950) 的定理中.

松山的定理 若 $f\in L^p(0, 2\pi)$，則当級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_p\left(\frac{1}{n}\right)n^{-\frac{1}{\max(2,q)}-\alpha}\quad\left(q=\frac{p}{p-1}\right)$$

收斂时，$\mathfrak{S}[f]$可用$|C, \alpha|$平均法求和;但

$$-1<\alpha<\frac{1}{\min(2, p)}+\frac{\min(0, \operatorname{sign}(2-p))}{p}=\begin{cases}\frac{1}{p} & (p\leqslant 2),\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{p} & (p>2).\end{cases}$$

条件(見倫敦数学会期刊 (J. L. M. S.) 1955)

$$\omega_2(t)=O\left(\left(\log\frac{1}{|t|}\right)^{-1-\delta}\right)\quad(\delta>0)$$

含有 $\sum(a_n^2+b_n^2)(\log n)^{1+\delta}<\infty$. 从而由王福春的定理,$\mathfrak{S}[f]$几乎处处可用$|C, \alpha|\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$平均法求和. 但是,在上述条件下,級数

$$\sum\omega_p\left(\frac{1}{n}\right)n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\quad(1<p<2)$$

收斂，从而由松山的定理，$\mathfrak{S}[f]=f(\theta)\left|C, \frac{1}{2}\right|$.就是說,下述定理成立:

定理 2 假如 $\omega_2(f; t)=O\left(\left(\log\frac{1}{|t|}\right)^{-1-\delta}\right)$ $(\delta>0)$,那末$\mathfrak{S}[f]$处处可用$\left|C, \frac{1}{2}\right|$平均法求和.

設 f 的富理埃級数是 $\mathfrak{S}[f]=\sum A_n(\theta)$. 假如有数列 $\{\lambda_n\}$,对于任一$\mathfrak{S}[f]$，能使 $\sum\lambda_n A_n(\theta)$依某种絕对求和法求和，那末 $\{\lambda_n\}$ 是富理埃級数对于这种求和法的**求和因子**. 程民德于 1947 年在美国丟克数学杂志(Duke Math. J.) 第十四卷上发表了如下的

定理 3 設 $\mathfrak{S}[f]=\sum A_n(\theta)$,則当 $\alpha>1$ 时,級数 $\sum\lambda_n A_n(\theta)$ 几乎处处可用$|C, \alpha|$求和法求和,这里

$$\lambda_n=\frac{1}{\log n\log_2 n\cdots\log_l n(\log_{l+1} n)^{1+\varepsilon}}\quad(\varepsilon>0),$$

$$\log_l n=\log(\log_{l-1} n)\quad n>n_0\ (\text{足够大的 } n_0).$$

依程民德的論法,定理 3 中的$\{\lambda_n\}$还可以提得抽象些;例如印度的迭克雪脱(Dikshit)于 1958 年在印度杂志上指出:定理 3 的$\{\lambda_n\}$只要满足如下的条件:

$$(1)\qquad \lambda_n>0,\ \Delta^2\lambda_n\geqslant 0,\ \sum\frac{\lambda_n}{n}<\infty$$

就够了. 当$\phi_\alpha(t)\ (0\leqslant t\leqslant\pi)$是有界变差时,程民德(1948)也得出$|C,\alpha|$求和因子. 在这方面的研究,日本和印度都有些发展.

12. 絕对黎斯求和. 絕对耨棱特求和

設$0<\lambda_n\uparrow\infty$, $k>0$; 对于$\sum a_n$, 作ω的函数

$$A_\lambda^k(\omega)=\sum_{\lambda_n\leqslant\omega}(\omega-\lambda_n)^k a_n,$$

当函数$\omega^{-k}A_\lambda^k(\omega)$在半直綫$(h,\infty)$上是有界变差:

$$\int_h^\infty|d(\omega^{-k}A_\lambda^k(\omega))|<\infty\quad(h>0)$$

时,称級数$\sum\limits_0^\infty a_n$可用$|R,\lambda_n,k|$平均法求和,这是指数k,$\lambda=\{\lambda_0,\lambda_1,\cdots\}$类型的黎斯平均的絕对求和法,此时极限

$$\lim_{\omega\to\infty}\omega^{-k}A_\lambda^k(\omega)$$

存在,极限值S是$\sum a_n$的(R,λ_n,k)和. 簡記做

$$\sum a_n=S\,|R,\lambda_n,k|.$$

因此,上式包含着$\sum a_n=S\,(R,\lambda_n,k)$.

关于$|R,\lambda_n,k|$在富理埃級数上的应用,許多研究,是以

$$(1)\qquad \lambda_n=\exp(\log n)^{1+B}\quad(n>0)$$

做类型的, B是常数. 保障等式

$$(2)\qquad \mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)\,|R,\lambda_n,k|$$

成立的条件,往往是如下的形式:

$$(3)\qquad \int_0^\pi\left|d[\phi(t)]_\alpha\left(\log\frac{\pi}{t}\right)^\beta\right|<\infty\quad(\beta\text{ 是常数}).$$

指数k是和α有关系的. 这里

$$[\phi(t)]_\alpha=\frac{\alpha}{t^\alpha}\int_0^t (t-u)^{\alpha-1}\phi_\theta(u)du,$$

$$\phi_\theta(t)=\frac{1}{2}\{f(\theta+t)+f(\theta-t)\}.$$

总的說来,我們可述如下的定理:

定理 1 在类型(1)的情况,(2)当(3)成立时成立;但 α, β, B 和 k 之間,满足下面关系:

(i) $\alpha=\beta=B=k=1$ (R. Mohanty, P. L. M. S. 1949).

(ii) $\alpha>0$, $\beta=1$, $B=\dfrac{1}{\alpha}$, $k=\alpha+1$(T. Pati, T. A. M. S. 1954).

(iii) $\alpha>0$, $\beta>0$, $B=\dfrac{\beta}{\alpha}$, $k>\alpha$(松本,东北数学杂志(2)9,1957).

求和法 $|R, \log n, \delta|$ $(\delta>0)$ 对于富理埃級数,也有应用. 泉(Izumi)-河田(Kawata)于东北数学杂志 45(1938) 上,証明关系

$$\mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)\,|R, \log n, 1|$$

在条件 $(f(\theta+t)-f(\theta-t))\left(\log\frac{1}{t}\right)^\beta=O(1)$ $(\beta>0,\ t\to0)$下成立. 后来松山(东北数学杂志 (2)3, 1951)将泉与河田的条件改弱为

$$f(\theta+t)-f(\theta-t)=O\left(\log\log\frac{1}{t}\right)^{-\beta}\quad(\beta>0,\ t\to0).$$

在同一杂志上,洲内 (G. Sunouchi) 証明:当 $\alpha\geqslant2$ 时,等式

$$\mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)\,|R, \log n, \alpha| \tag{4}$$

在条件 $\int_0^\pi|d\,\phi_\alpha(t)|<\infty$ 下成立. 后来, R. Mohanty-S. Mahapta 在(德国) Math. Zeits. 65(1956)上,指出:假如函数

$$\left(\log\frac{2\pi}{t}\right)^{-1}\int_t^\pi\{f(\theta+t)-f(\theta-t)\}\frac{dt}{t}\quad(\theta\leqslant t\leqslant\pi)$$

是有界变差,那末(4)当 $\alpha>0$ 时成立.

一般地說, $|R, \log n, 1|$ 对于 $\mathfrak{S}[f;\theta]$ 的求和,并非 f 在点 θ 附近的局部性. 这是在 1950 年,泉信一以及 R. Mohanty 分别在东北数学杂志和倫敦数学会期刊 (J. L. M. S.) 上証明过的. 泉信一的定理是下述古馬利 (S. Kumari) 定理 (1959 年的印度科学摘要)的特殊情况:

定理 2 設 $1\leqslant p\leqslant 2$, $f\in L^p(0, 2\pi)$, 等式

$$\mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)\left|R, \log n, \frac{1}{p}\right|$$

的成立,关联着整个 f 的性质而不是 f 在定点 θ 附近的局部性.

我們还应該注意下述事实: 設

$$f(\theta)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta).$$

假如在点 θ, 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta}{n\log n}$$

絕对收斂,那末 $\mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)|R, \log n, 1|$ 是 f 在 θ 的一个局部性. 这是勃哈脫(S. N. Bhatt, 东北数学杂志 11, 1959)的定理;它是泉信一定理的改进.

我們提到过耨棱特(Nörlund)求和:对于 $S_n=a_0+\cdots+a_n$, 假如

$$t_n=\frac{1}{p_0+\cdots+p_n}\sum_{\nu=0}^{n}p_{n-\nu}S_\nu\quad(p_\nu>0)$$

当 $n\to\infty$ 时,有极限 S, 那末 $\sum a_n=S(N, p_n)$. 假如 $\{t_n\}$ 是有界变差, 那末 $\sum a_n=S|N, p_n|$, 这里 $t_n\to S$. 耨棱特絕对求和法,是具有概括性的. 例如 $\int_0^{\pi}|d\phi(t)|<\infty$ 含有 $\mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)|C, \delta|(\delta>0)$. 这是波山桂的定理,乃是下述拍蒂(T. Pati, J. L. M. S. 34, 1959)定理的一种特殊情况:

定理 3 設 $p_\nu>0$, $p_0+\cdots+p_\nu=P_\nu\to\infty$. 假如两个数列

$$\left\{\frac{(n+1)p_n}{P_n}\right\}\text{ 和 }\left\{\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{P_\nu}{\nu+1}\right\}$$

以及函数 $\phi(t)$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$ 都是有界变差,那末

$$\mathfrak{S}[f;\theta]=f(\theta)|N, p_n|.$$

事实上,置 $p_n=(\delta)_n$ $(0<\delta<1)$, 就知道所述是真的.

另一方面,梵西尼(O. P. Varshney, PAMS, 1959)証明: 当 $\phi(t)$ 在 $[0, \pi]$ 上是有界变差时, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{A_n(\theta)}{\log n}$ 是 $\left|N, \frac{1}{n+1}\right|$ 可和的. 在这方

面，印度和日本都有一些研究.

近几年来，我国数学工作者，有关 § 11, § 12 两节中的事项，有不少研究，陆續发表在“数学学报”，“复旦大学学报”，“杭州大学学报”上. 这里只不过引入端緒，未能詳述許多結果，加以証明. 写这几行，以結束本节.

索 引

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 六 画